

**УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
КИБЕРНЕТИКИ**

**Александров П. А., Еленин Г. Г.**

**Точные решения системы разрешающих  
уравнений метода средней точки  
для задачи о движении материальной точки  
в поле кубического потенциала**

**Препринт**

**МОСКВА – 2011**

УДК 519.622.2

Александров Петр Александрович  
Еленин Георгий Георгиевич

Это электронная версия препринта, опубликованного со следующими выходными данными: «Точные решения системы разрешающих уравнений метода средней точки для задачи о движении материальной точки в поле кубического потенциала. Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2011. – 32 с.».

Получены формулы для точных решений системы нелинейных разрешающих уравнений метода средней точки. Эта система возникает при приближенном решении задачи Коши об одномерном движении материальной точки в поле кубического потенциала. Проведен параметрический анализ решений. Выделено единственное точное решение разрешающих уравнений, аппроксимирующее решение исходной задачи Коши.

Почтовый адрес авторов:  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ имени М. В. Ломоносова,  
2-й учебный корпус, факультет ВМК,

электронная почта: [elenin2@rambler.ru](mailto:elenin2@rambler.ru)  
тел. : (495)-939-18-89

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
Российского Фонда Фундаментальных Исследований  
(проект 09-01-12098-офи-м, 11-01-12017-офи-м).*

## Введение

Цель настоящей работы заключается в получении вычислительно устойчивых формул для точных решений определённой системы разрешающих уравнений метода средней точки. Эта система возникает при решении задачи Коши об одномерном финитном движении материальной точки в поле кубического потенциала. При малых значениях шага семейства вычислительных методов система разрешающих уравнений является сингулярно возмущённой. Эта система имеет два действительных решения. Лишь одно из них аппроксимирует точное решение исходной задачи Коши для дифференциальных уравнений движения.

В работе исследованы особенности зависимостей решений разрешающих уравнений от шага по времени, а также параметра, характеризующего интегральную кривую в фазовом пространстве.

Выделенное точное решение может быть использовано при тестировании компьютерных программ, реализующих рассматриваемый вычислительный метод решения задачи Коши для гамильтоновых систем.

### 1. Постановка задачи

**Модельная задача.** Рассмотрим одномерное финитное движение материальной точки единичной массы в поле кубического потенциала  $u(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ . Такие движения описываются решениями  $v = v(t)$ ,  $x = x(t)$ ,  $t > 0$  следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{du(x)}{dx} = g(x) = x - x^2, \\ \frac{dx}{dt} = v, \\ v(t_0) = v_0, \quad x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Функции  $v(t)$  и  $x(t)$  определяют скорость и положение материальной точки в момент времени  $t > t_0$ . Функция  $u = u(x)$  описывает зависимость потенциальной энергии от положения материальной точки. Решение задачи (1) осуществляет преобразование  $\phi_t$  начального состояния системы  $\{v_0, x_0\}$  в текущее состояние  $\{v(t), x(t)\}$ .

**Результаты качественного анализа.** Качественный анализ задачи (1) показывает, что финитное движение материальной точки существует для начальных условий,

удовлетворяющих следующим ограничениям

$$0 < x_0 < 1.5, \quad |v_0| < x_0 \sqrt{1 - \frac{2}{3} x_0}, \quad (2)$$

и является периодическим

$$v(t) = v(t + T), \quad x(t) = x(t + T), \quad t \in [0, T], \quad T > 2\pi. \quad (3)$$

Период  $T$  зависит от начальных условий и неограниченно возрастает при

$$E_0 = \frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{3} x_0^3 - \frac{1}{2} x_0^2 \rightarrow 0 - 0.$$

Период может быть вычислен по следующей формуле

$$T(E_0) = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2E_0 - \frac{2}{3}x^3 + x^2}},$$

где  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  – координаты точек возврата в случае финитного периодического движения,

которые являются средним и большим по величине корнями уравнения  $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3E_0 = 0$ .

Формулы для этих корней приведены ниже. Полная энергия материальной точки в случае

финитного периодического движения удовлетворяет неравенствам  $-\frac{1}{6} < E_0 < 0$ . Так,

например,  $T(-0.165) \approx 6.29196$ ,  $T\left(-\frac{1}{12}\right) \approx 6.90164$ ,  $T\left(-\frac{1}{600}\right) \approx 10.6812$ .

При  $x_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  решение задачи (1) описывает устойчивое по Ляпунову стационарное состояние  $x(t) \equiv 1$ ,  $v(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, +\infty)$ .

При  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  решение задачи (1) соответствует неустойчивому по Ляпунову стационарному состоянию  $x(t) \equiv 0$ ,  $v(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, +\infty)$ . Исчезающе малые возмущения этого начального условия приводят либо к ангармоническим колебаниям с большим периодом  $T \gg 2\pi$ , либо к инфинитному движению, при котором материальная точка удаляется на «минус бесконечность» за конечное время  $T_\infty$ .

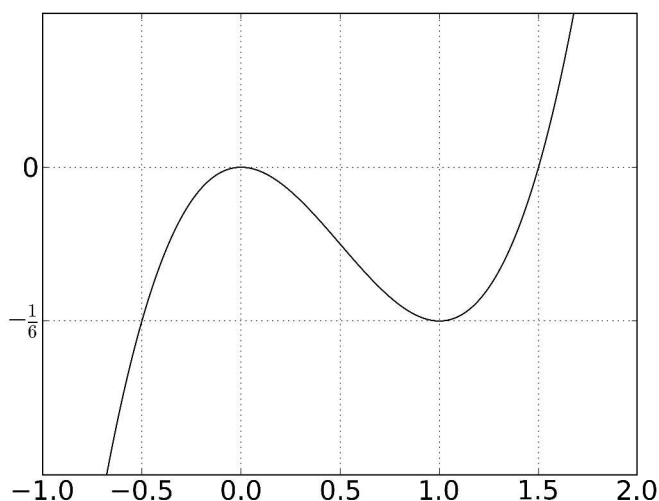
Инфинитные движения материальной точки имеют место при  $x_0 < 0$ ,

$$v_0 \neq \pm |x_0| \sqrt{1 - \frac{2}{3} x_0}; \quad 0 < x_0 < 1.5, \quad |v_0| > |x_0| \sqrt{1 - \frac{2}{3} x_0}; \quad x_0 > 1.5, \quad \forall v_0.$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь финитные движения материальной точки.

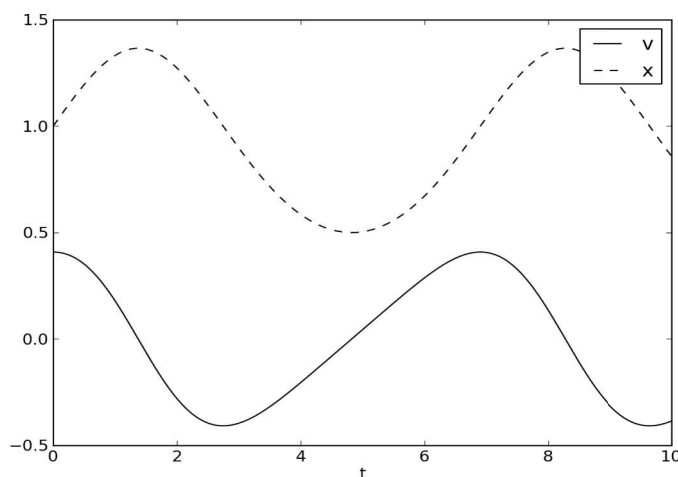
На рис. 1 изображена потенциальная «яма», в которой происходит финитное движение

материальной точки  $0 < x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} < 1.5$ .



**Рис. 1: Зависимость потенциальной энергии от положения материальной точки.**

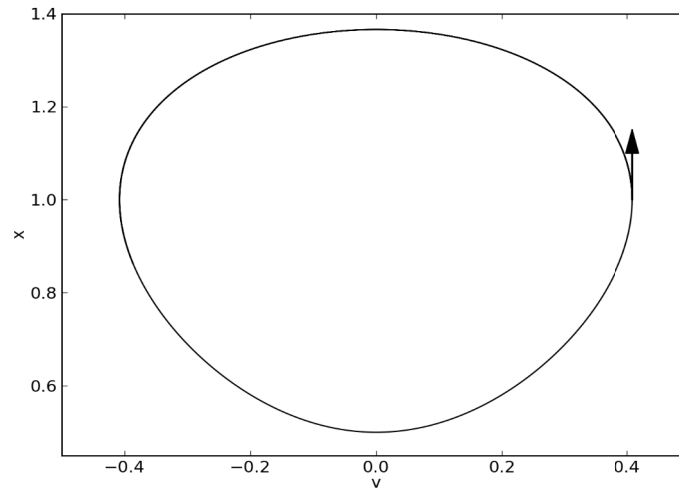
На рис. 2 представлены зависимости скорости  $v$  и координаты  $x$  от времени  $t$  для начальных условий  $x_0 = 1$ ,  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . Заметен ангармонизм колебательного движения материальной точки, усиливающийся при возрастании  $|v_0|$ .



**Рис. 2: Графики решения задачи Коши на отрезке времени, превышающем период  $T \approx 6.9$ .**

На рис. 3 показана траектория в фазовой плоскости  $(v, x)$ . Стрелкой указано направление движения точки, определяющей состояние, по траектории. Заметно отклонение формы фазовой траектории от эллипса. Особая точка фазовой плоскости с координатами  $(0, 1)$  является центром, а особая точка с координатами  $(0, 0)$  является седлом с

сепаратрисным контуром  $|v_0| = |x_0| \sqrt{1 - \frac{2}{3}x_0}$ .



**Рис. 3: Траектория решения в фазовой плоскости для  $x_0 = 1, v_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .**

**Глобальные свойства решений задачи.** Как известно [1], решение задачи Коши (1) осуществляет симплектическое преобразование начального состояния  $(v_0, x_0)$  в текущее состояние  $(v(t), x(t))$

$$\left( \frac{\partial(v(t), x(t))}{\partial(v_0, x_0)} \right)^T J \left( \frac{\partial(v(t), x(t))}{\partial(v_0, x_0)} \right) = J, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

является обратимым во времени

$$(v_0, x_0) \xrightarrow{\phi_t} (v(t), x(t)) \xrightarrow{R} (-v(t), x(t)) \xrightarrow{\phi_t} (\hat{v}(2t), \hat{x}(2t)) \xrightarrow{R} (v_0, x_0),$$

и сохраняет полную энергию

$$E(t) = \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{3}x^3(t) - \frac{1}{2}x^2(t) = E_0 = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2.$$

**Требования к численным методам решения задачи Коши.** Решение модельной задачи может быть найдено лишь приближённо с помощью того или иного вычислительного метода. При приближенном решении задачи естественно потребовать от вычислительного метода достаточного порядка аппроксимации, устойчивости и сохранения перечисленных глобальных алгебраических свойств точного решения.

В настоящей работе для получения приближенного решения используется метод средней точки [1]. Этот метод имеет второй порядок аппроксимации, осуществляет симплектическое отображение на одном шаге и дает решение, обратимое на одном шаге в рамках точной арифметики.

Для построения приближенного решения на каждом шаге вычислительного алгоритма требуется найти решение системы нелинейных разрешающих уравнений. Такое решение может быть получено тем или иным итерационным методом. Например, методом Ньютона.

Представляет интерес найти точные решения системы разрешающих уравнений рассматриваемого вычислительного метода.

Основная задача настоящей работы заключается в построении вычислительно устойчивых формул для точных решений системы разрешающих уравнений метода средней точки.

## 2. Система разрешающих уравнений метода средней точки

Применительно к поставленной задаче формулы метода средней точки имеют следующий вид

$$\begin{aligned} k_{11} &= g\left(x_i + \frac{\tau}{2} k_{12}\right), \\ k_{12} &= v_i + \frac{\tau}{2} k_{11}, \\ v_{i+1} &= v_i + \tau k_{11}, \\ x_{i+1} &= x_i + \tau k_{12}, \end{aligned}$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $g(x) = x - x^2$ .

Заменим  $k_{12}$ , используя второе уравнение. Получим

$$k_{11} = g\left(x_{i-1} + 0.5 \tau v_{i-1} + 0.25 \tau^2 k_{11}\right), \quad (4)$$

$$v_i = v_{i-1} + \tau k_{11}, \quad x_i = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5 \tau^2 k_{11}. \quad (5)$$

При  $\tau = 0$  система разрешающих уравнений (4), (5) имеет единственное решение

$$k_{11} = g(x_{i-1}), \quad (6)$$

и состояние системы на временном слое  $i$  совпадает с состоянием на предыдущем слое  $i - 1$

$$v_i = v_{i-1}, \quad x_i = x_{i-1}. \quad (7)$$

В дальнейшем будем предполагать, что параметры решения на предыдущем шаге  $v_{i-1}$  и  $x_{i-1}$  связаны соотношением сохранения энергии

$$v_{i-1} = \pm \sqrt{2 E_0 + x_{i-1}^2 - \frac{2}{3} x_{i-1}^3}, \quad 0 < x_{\min} \leq x_{i-1} \leq x_{\max}, \quad -\frac{1}{6} < E_0 < 0. \quad (8)$$

где  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  – средний и больший по величине корни уравнения

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3E_0 = 0, \quad -\frac{1}{6} < E_0 < 0.$$

Эти корни равны следующим величинам<sup>1</sup>

$$x_{\min} = -\cos\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right) + \frac{1}{2}; \quad x_{\max} = \cos\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}, \quad \text{где } \alpha = \arccos(1 + 12E_0).$$

Если  $-\frac{1}{6} < E_0 < 0$ , то  $-1 < 1 + 12E_0 < 1$ .

### 3. Точное решение разрешающего уравнения метода средней точки

Разрешающее уравнение (4) является квадратным и содержит малый параметр  $\tau$  при старшей степени

$$\begin{aligned} & \tau^4 k_{11}^2 + 16 \left( 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \right) k_{11} + \\ & + 16 \left( -(x_{i-1} - x_{i-1}^2) - \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

При выполнении неравенства

$$D = 1 - \frac{\tau^2}{2} \left( 1 - 2x_{i-1} - \tau \left( v_{i-1} + \frac{\tau}{8} \right) \right) < 0 \quad (9)$$

уравнение (4) не имеет действительных решений. При выполнении условия

$$D \geq 0 \quad (10)$$

оно имеет либо одно действительное двукратное решение<sup>2</sup> ( $D = 0$ )

$$k_{11} = \frac{1}{4} - \frac{4}{\tau^4}, \quad (11)$$

либо два действительных простых решения ( $D > 0$ ).

Представляет интерес найти непрерывные зависимости решений  $k_{11,1}$  и  $k_{11,2}$  от  $\tau$ . Эти

1 Третий корень кубического уравнения равен  $x_1 = -\cos\left(\frac{\alpha - \pi}{3}\right) + \frac{1}{2} < x_{\min}$ . Значения корней найдены с помощью метода Кардано [2]. При этом  $\frac{1}{2} \leq \cos\left(\frac{\alpha - \pi}{3}\right) \leq 1$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \cos\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\alpha}{3} \leq 1$ , так как  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Отсюда следует, что  $-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 0$ ,  $0 \leq x_{\min} \leq 1$  и  $1 \leq x_{\max} \leq \frac{3}{2}$  (при  $-\frac{1}{6} < E_0 < 0$ ).

2 Если дискриминант  $D = 0$ , то двукратный корень  $k_{11} = \frac{-16 \left( 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1} - \tau v_{i-1}) \right)}{2\tau^4}$ . Из выражения  $D = 0$  получим, что  $-\frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1} - \tau v_{i-1}) = -\frac{1}{2} - \frac{\tau^4}{32}$ . Используя последнее выражение, получим формулу (11).



зависимости выражаются вычислительно устойчивыми формулами следующего вида

$$k_{11,1} = \begin{cases} \frac{2 \left( x_{i-1} - x_{i-1}^2 + \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) - \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right)}{1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} + \sqrt{D}}, & 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \geq 0, \\ -\frac{8}{\tau^4} \left[ 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} - \sqrt{D} \right], & 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} < 0, \end{cases} \quad (12.1)$$

$$k_{11,2} = \begin{cases} -\frac{8}{\tau^4} \left[ 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} + \sqrt{D} \right], & 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \geq 0, \\ \frac{2 \left( x_{i-1} - x_{i-1}^2 + \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) - \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right)}{1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} - \sqrt{D}}, & 1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} < 0. \end{cases} \quad (12.2)$$

При достаточно малых  $\tau$  лишь решение  $k_{11,1}$  дает аппроксимацию точного решения исходной задачи Коши

$$v_{i,1} = v_{i-1} + \tau k_{11,1}, \quad (13.1)$$

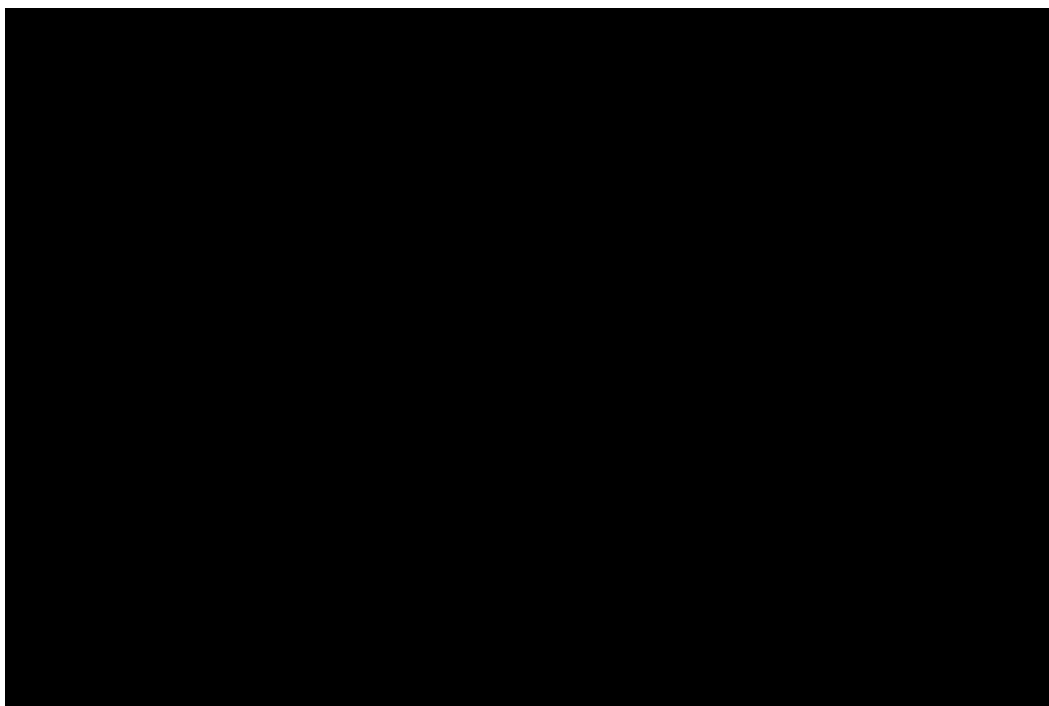
$$x_{i,1} = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5 \tau^2 k_{11,1}. \quad (13.2)$$

Решение  $k_{11,2}$  является «паразитным». Обозначим

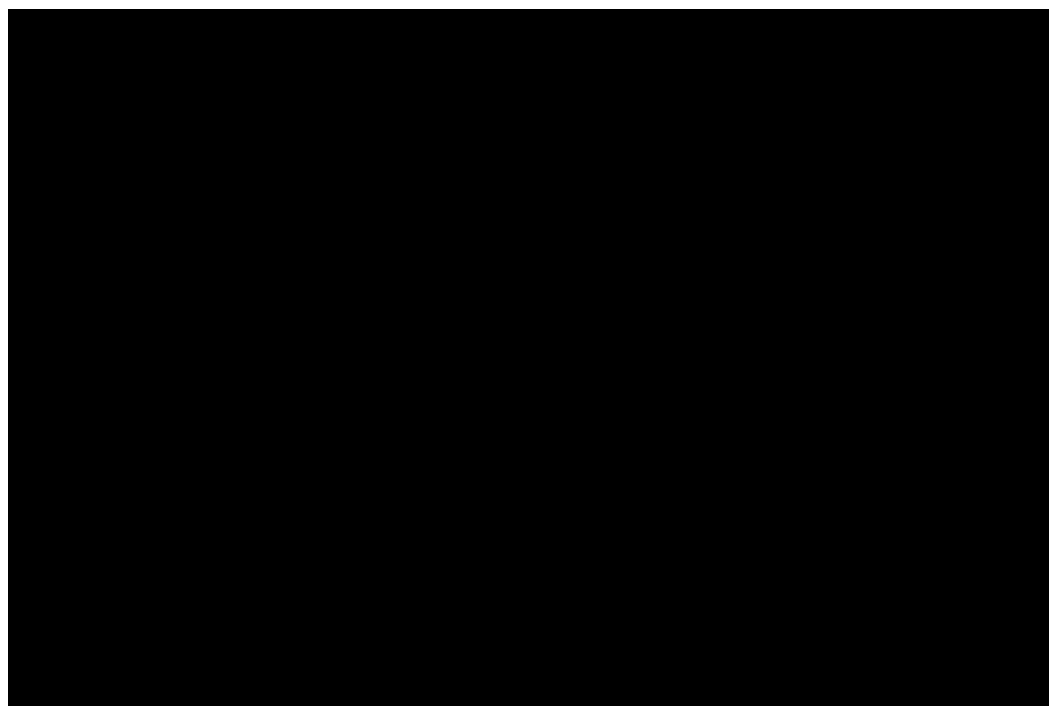
$$v_{i,2} = v_{i-1} + \tau k_{11,2}, \quad (14.1)$$

$$x_{i,2} = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5 \tau^2 k_{11,2}. \quad (14.2)$$

На рис. 4 – 17 показаны зависимости решений  $x_i$  от шага  $\tau/T$  при различных значениях параметров решения  $x_{i-1}$  и  $E_0$ . Величина  $E_0$  принимает значения  $-1/12$ ,  $-1/600$ ,  $-0.165$ . На каждом рисунке изображены графики зависимостей  $x_i$  от  $\tau$  при различных  $x_{i-1}$ .



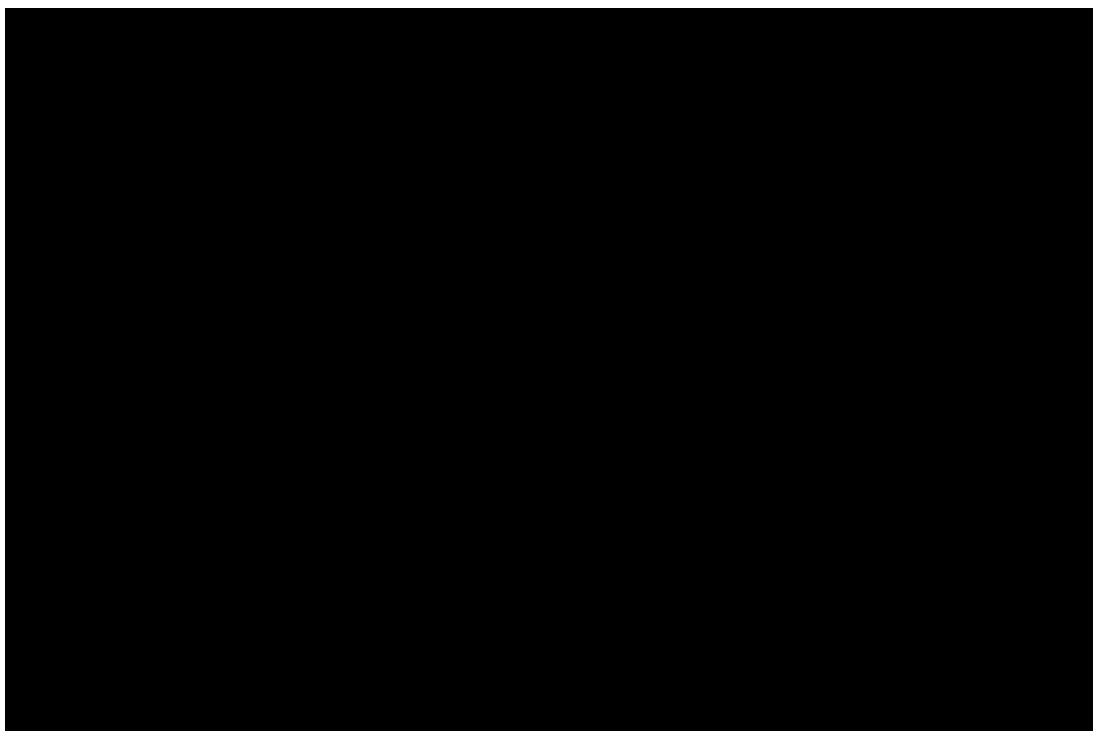
**Рис. 4:** Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -1/12$ .



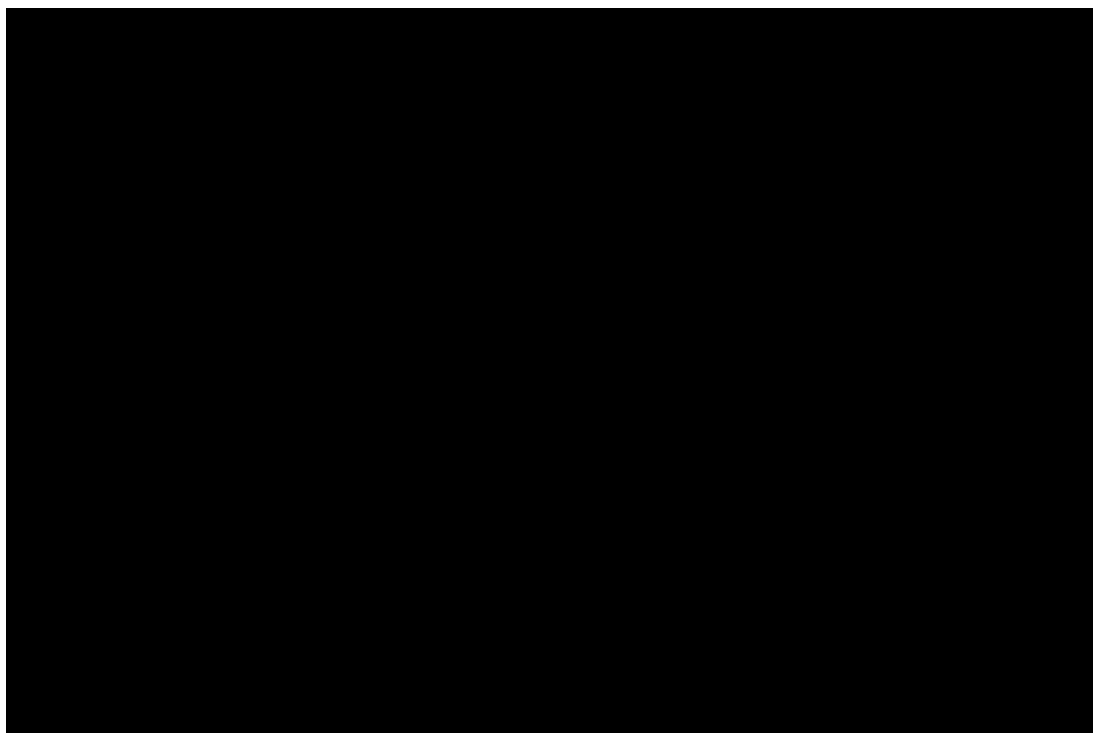
**Рис. 5:** Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/12$ .

На рисунках 4 и 5 графику с номером 1 соответствует значение  $x_{i-1}$ , равное координате точки возврата: 0.5. Номерам других графиков соответствуют следующие значения  $x_{i-1}$ . 2: 0.6; 3: 0.8; 4: 1; 5: 1.2; 6: 1.3. Графику с номером 7 соответствует значение  $x_{i-1}$ , равное координате другой точки возврата:  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

Номера графиков на рисунке 4 и рисунке 5 соответствуют определённым точкам на фазовой траектории. Эти точки изображены на рисунке 8 (левый).



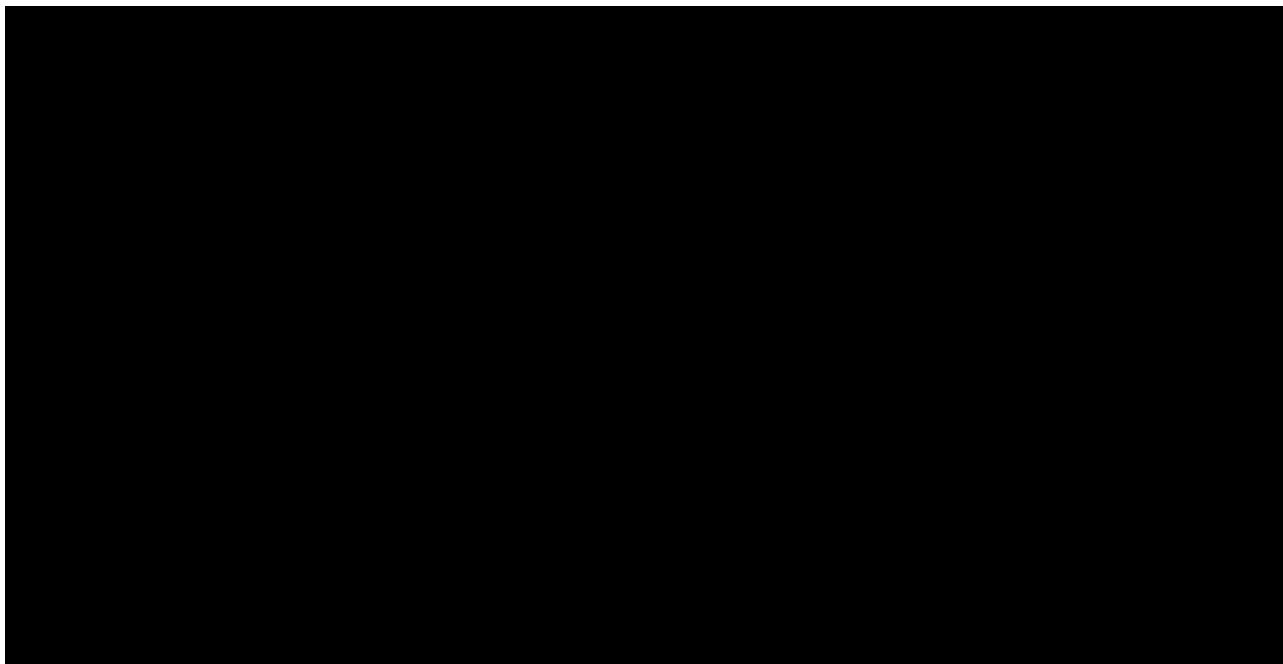
**Рис. 6:** Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 4) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -1/12$ .



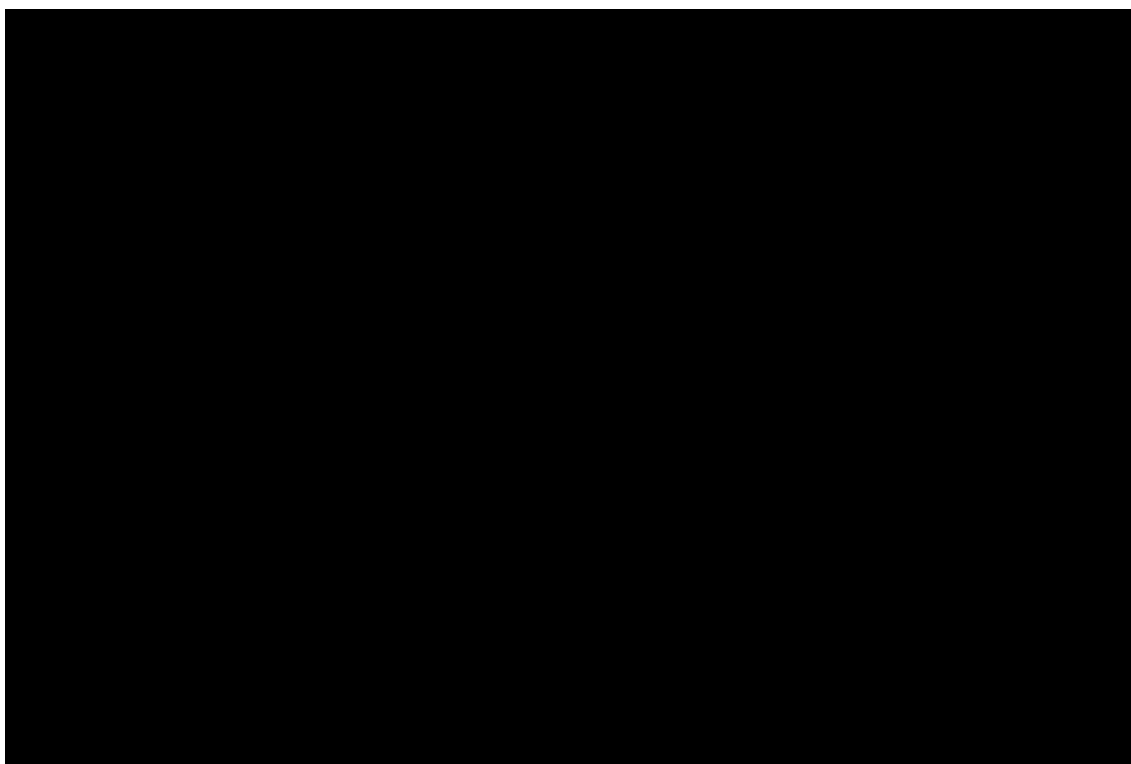
**Рис. 7:** Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 4) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/12$ .

На рисунках 6 и 7 номерам графику с номером 1 соответствует значения  $x_{i-1}$ , равное

0.5; с номером 2: 0.9; с номером 3: 1; с номером 4:  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ . Точки 1 – 4 изображены на рисунке 8 (правый).



**Рис. 8: Точки на траектории в фазовой плоскости для  $E_0 = -1/12$ .**

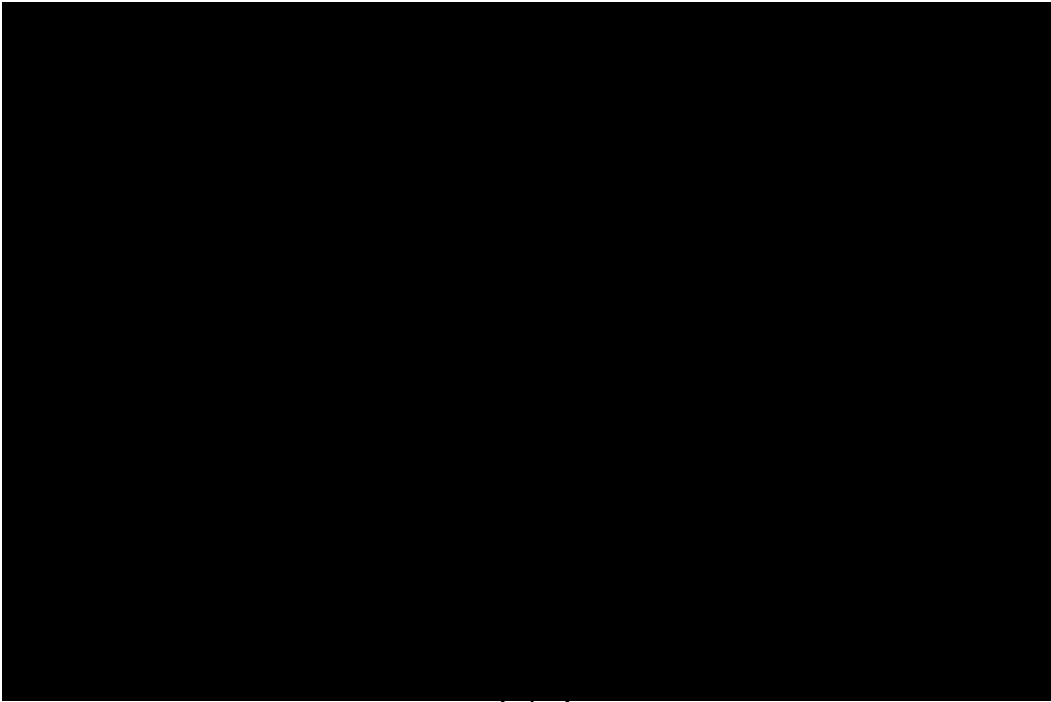


**Рис. 9: Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 9) для отрицательной скорости.  $E_0 = -1/600$ .**



**Рис. 10:** Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 9) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/600$ .

На рисунках 9, 10, 11 и 12 изображены те же зависимости для  $E_0 = -1/600$ . Номера зависимостей соответствуют точкам на фазовой плоскости, представленным на рисунке 13<sup>3</sup>. В этом случае точки возврата имеют координаты 0.0589031 и 1.49777.



**Рис. 11:** Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 5) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -1/600$ .

<sup>3</sup> На рисунках 9 и 10 номерам графиков соответствуют следующие значения  $x_{i-1}$ . 1: 0.0589031; 2: 0.2; 3: 0.4; 4: 0.6; 5: 0.8; 6: 1; 7: 1.2; 8: 1.35; 9: 1.49777. На рисунках 11 и 12 номерам графиков соответствуют следующие значения  $x_{i-1}$ . 1: 0.0589031; 2: 0.5; 3: 0.8; 4: 1; 5: 1.49777.



Рис. 12: Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 5) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/600$ .

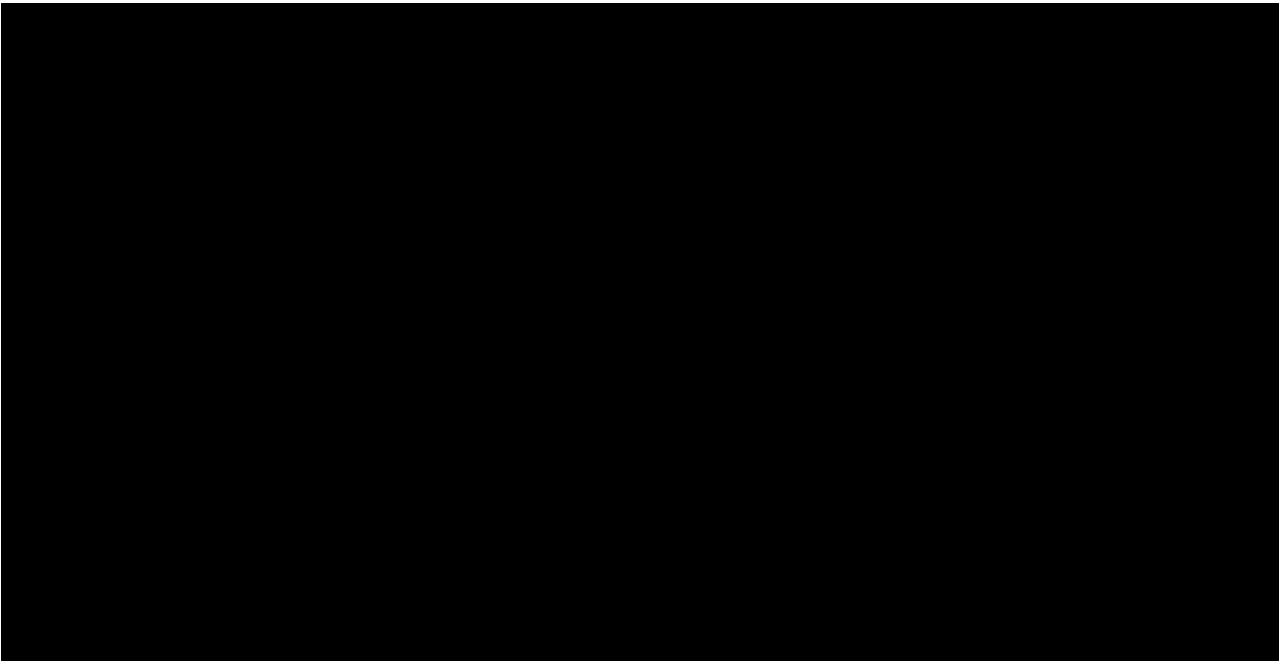


Рис. 13: Точки на траектории в фазовой плоскости для  $E_0 = -1/600$ .

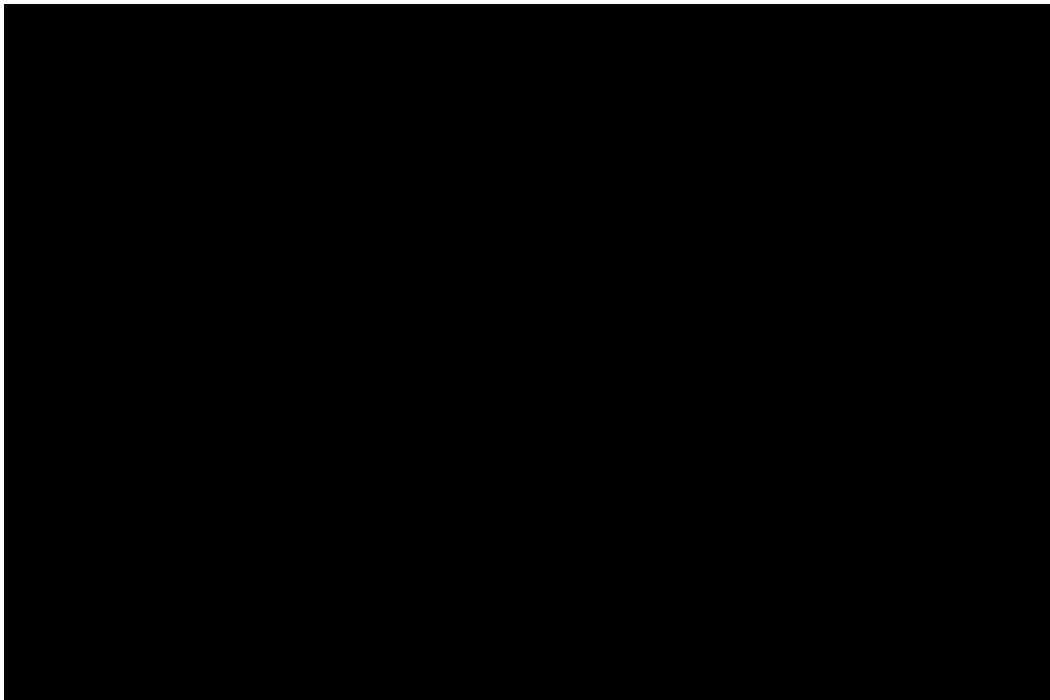


Рис. 14: Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -0.165$ .

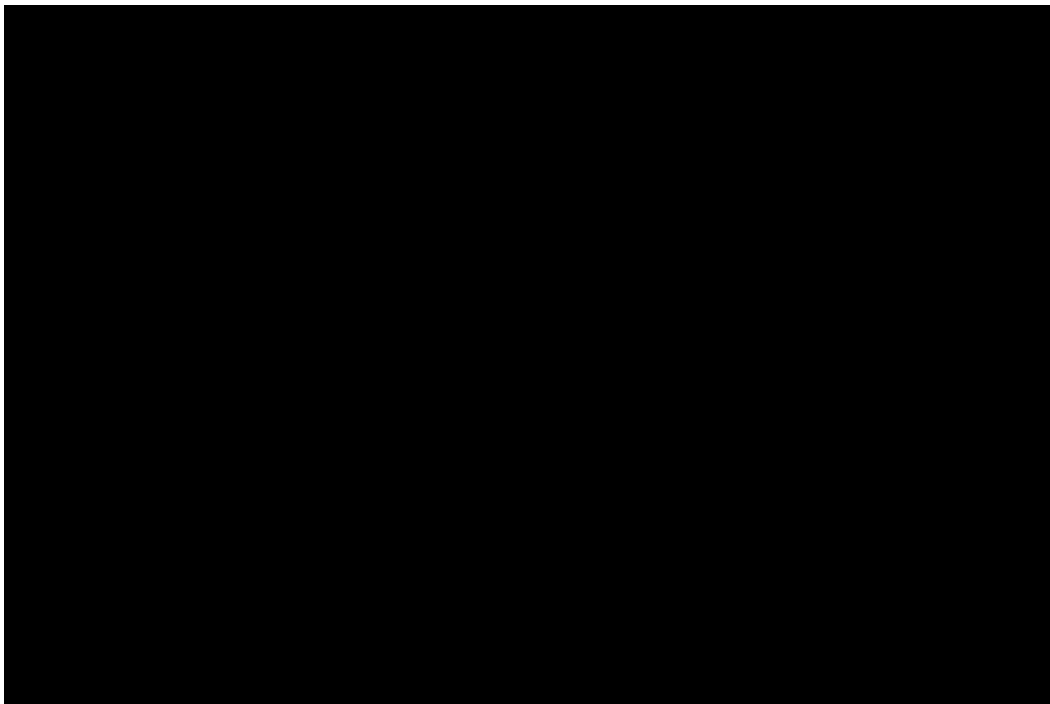


Рис. 15: Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для положительной скорости.  
 $E_0 = -0.165$ .

Рисунки 14, 15, 16, 17, 18 соответствуют случаю  $E_0 = -0.165^4$ . Точки возврата имеют координаты: 0.941097 и 1.05667.

4 На рисунках 14 и 15 номерам графиков соответствуют следующие значения  $x_{i-1}$ . 1: 0.941097; 2: 0.96; 3: 0.98; 4: 1; 5: 1.02; 6: 1.04; 7: 1.05667. На рисунках 16 и 17 номерам графиков соответствуют следующие значения  $x_{i-1}$ . 1: 0.941097; 2: 1.05667.



Рис. 16: Зависимость  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 2) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -0.165$ .

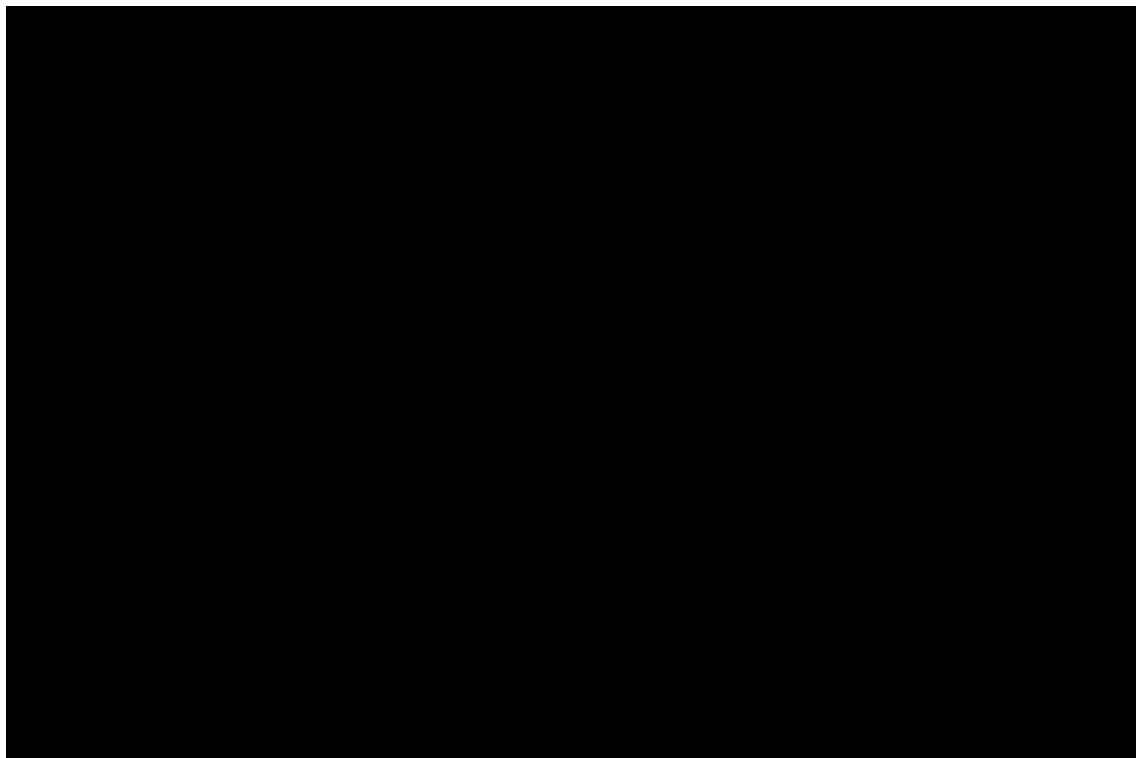
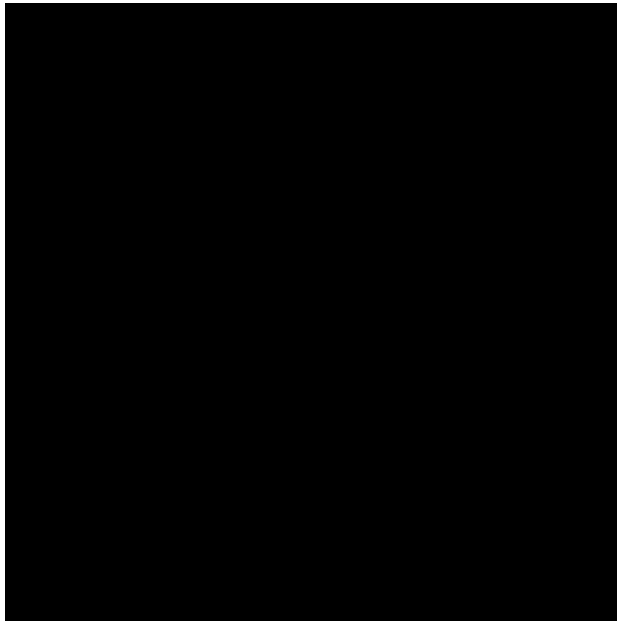


Рис. 17: Зависимость  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 2) для положительной скорости.  
 $E_0 = -0.165$ .



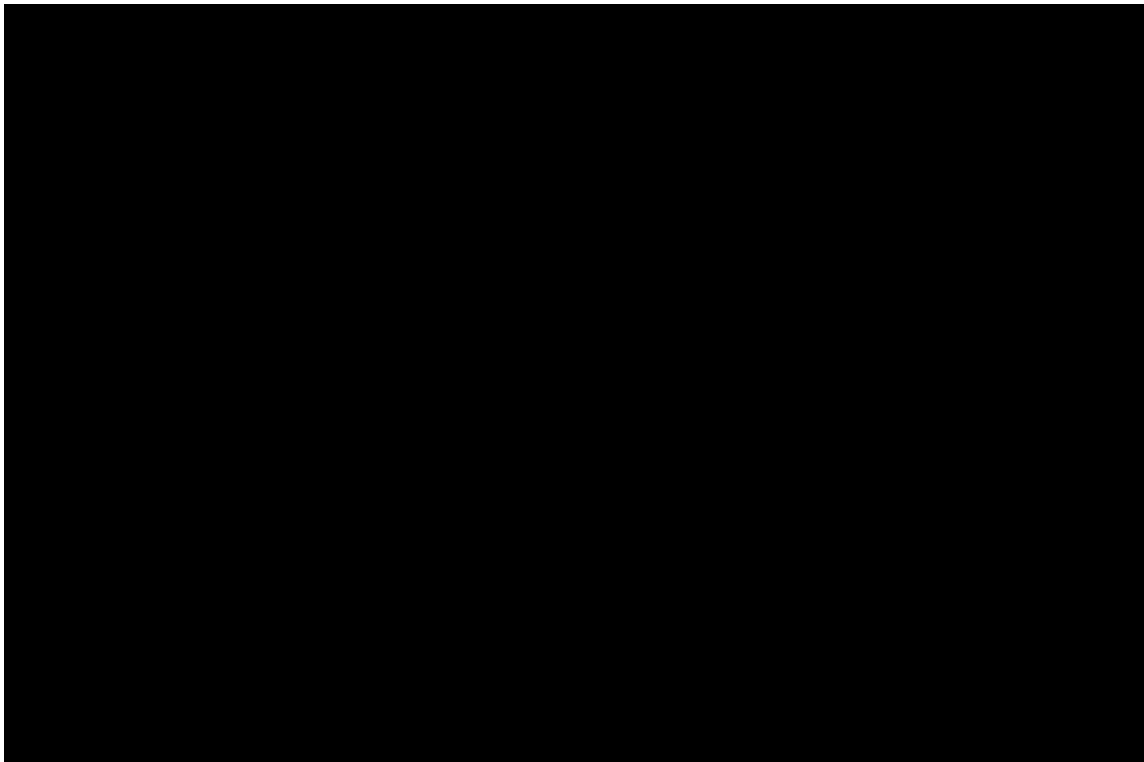


**Рис. 18: Точки на траектории в фазовой плоскости для  $E_0 = -0.165$ .**

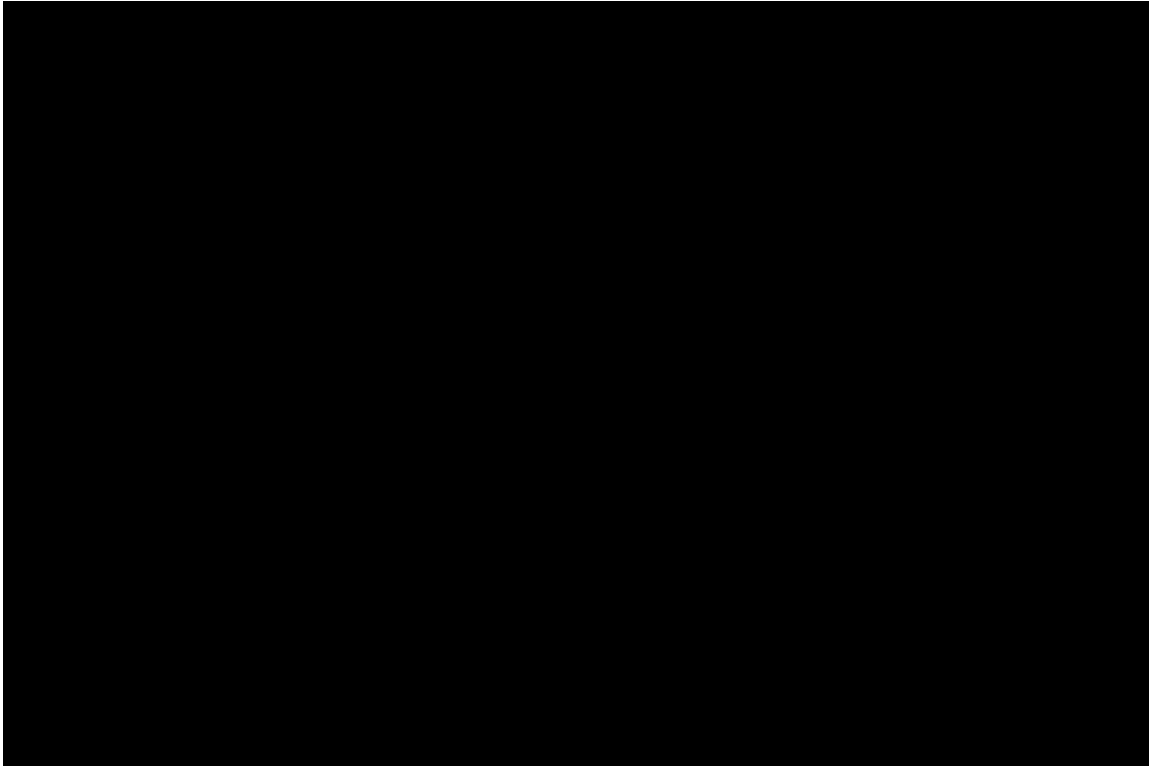
Предельные значения решений  $x_i$  из формулы (13.2) при  $\tau \rightarrow +\infty$  равны

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} x_i = -x_{i-1} + 2.$$

Переход от  $x_{i-1}$  к  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x_i$  соответствует отражению точки  $x_{i-1}$  на оси относительно точки 1. На рисунках изображены графики  $x_i$  для больших  $\tau$ . Значение энергии  $E_0 = -1/12$ . Значения  $x_{i-1}$  и нумерация графиков такие же, как и на рисунках 4 и 5.



**Рис. 19: Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для отрицательной скорости.  $E_0 = -1/12$ .**



**Рис. 20:** Зависимости  $x_{i,1}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 7) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/12$ .

Предельное значение  $x_{i,2}$  из формулы (14.2) («паразитного» решения) при  $\tau \rightarrow +\infty$  равно  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x_i = -x_{i-1}$ . То есть в этом случае переход от  $x_{i-1}$  к  $\lim_{\tau \rightarrow 0} x_i$  соответствует отражению точки  $x_{i-1}$  на оси относительно начала координат. Рисунки 19, 20, 21, 22 хорошо иллюстрируют ограниченность решений для  $\tau \in [0, +\infty)$ .

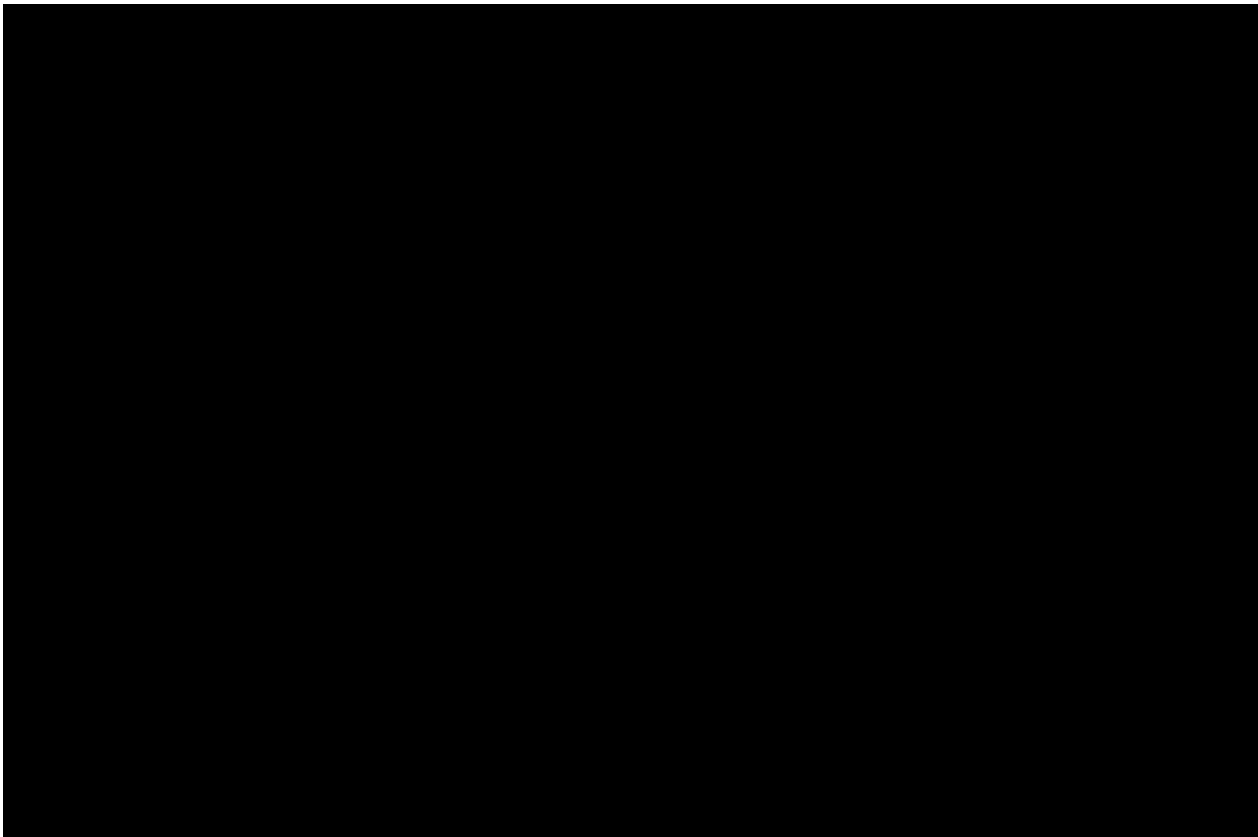


Рис. 21: Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 4) для отрицательной скорости.  
 $E_0 = -1/12.$

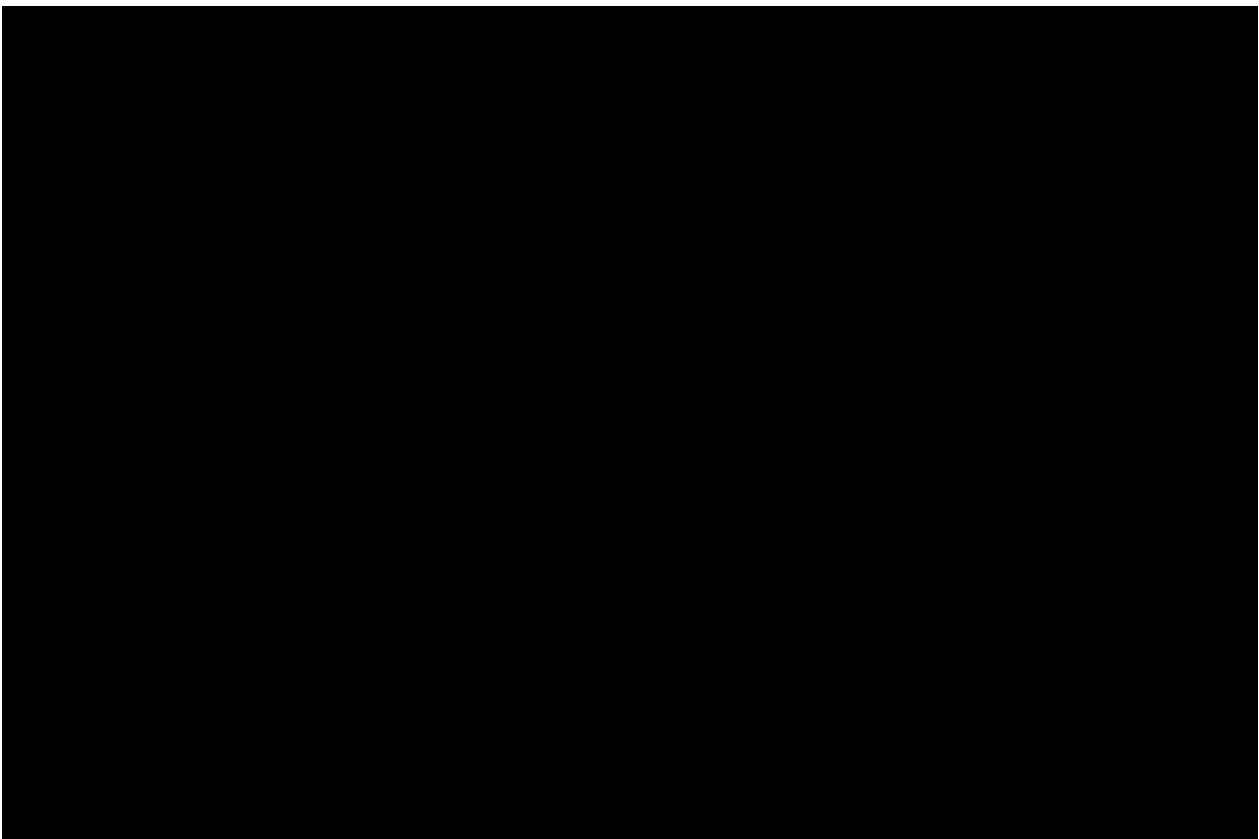


Рис. 22: Зависимости  $x_{i,2}(\tau/T)$  при различных  $x_{i-1}$  (1 – 4) для положительной скорости.  
 $E_0 = -1/12.$

#### 4. Решение разрешающего уравнения в виде степенного ряда

При малых значениях шага можно найти решение  $k_{11,1}$  в виде степенного ряда

$$\begin{aligned}
 k_{11,1} \approx & (x_{i-1} - x_{i-1}^2) + \frac{1}{2}(1 - 2x_{i-1})v_{i-1}\tau + \frac{1}{4}(x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}^3 - v_{i-1}^2)\tau^2 + \\
 & + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 3x_{i-1} + 3x_{i-1}^2\right)v_{i-1}\tau^3 + \\
 & + \frac{1}{16}(x_{i-1} - 6x_{i-1}^2 + 10x_{i-1}^3 - 5x_{i-1}^4 + 3(2x_{i-1} - 1)v_{i-1}^2)\tau^4 + \\
 & + \frac{1}{32}(1 - 12x_{i-1} + 30x_{i-1}^2 - 20x_{i-1}^3 + 2v_{i-1}^2)v_{i-1}\tau^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 v_{i,1} = v_{i-1} + \tau k_{11,1} \approx & v_{i-1} + (x_{i-1} - x_{i-1}^2)\tau + \frac{1}{2}(1 - 2x_{i-1})v_{i-1}\tau^2 + \\
 & + \frac{1}{4}(x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}^3 - v_{i-1}^2)\tau^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 3x_{i-1} + 3x_{i-1}^2\right)v_{i-1}\tau^4 + \\
 & + \frac{1}{16}(x_{i-1} - 6x_{i-1}^2 + 10x_{i-1}^3 - 5x_{i-1}^4 + 3(2x_{i-1} - 1)v_{i-1}^2)\tau^5 + \dots,
 \end{aligned} \tag{16.1}$$

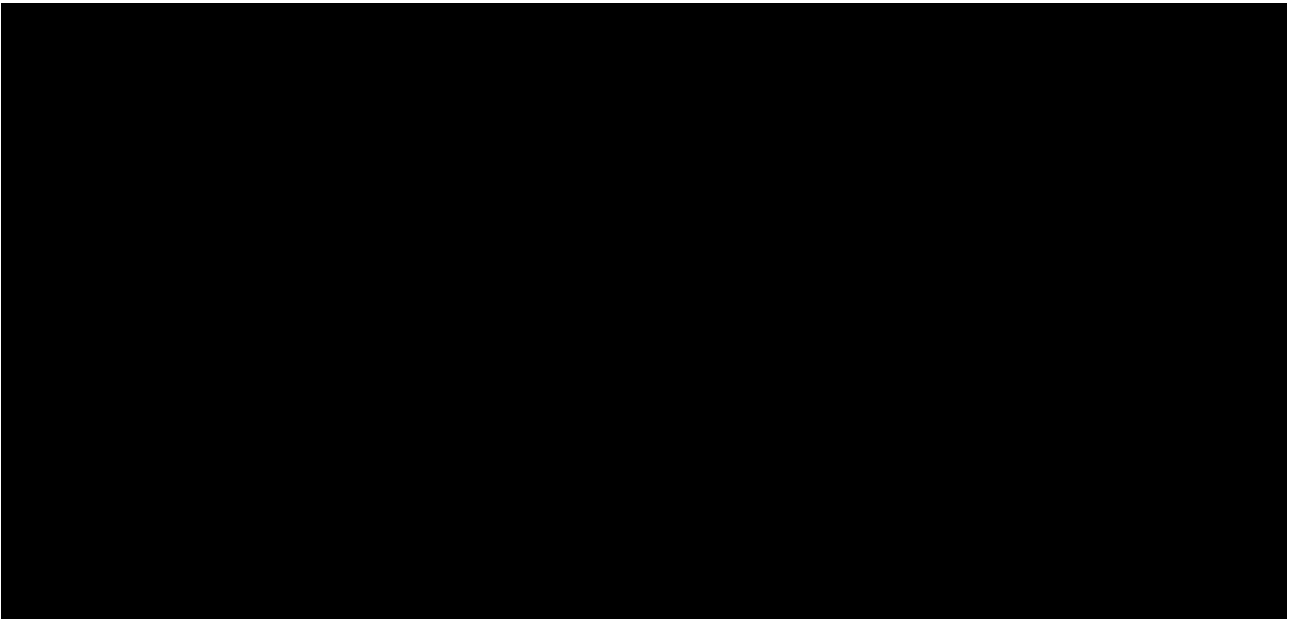
$$\begin{aligned}
 x_{i,1} = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5\tau^2 k_{11,1} \approx & x_{i-1} + \tau v_{i-1} + \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i-1}^2)\tau^2 + \\
 & + \frac{1}{4}(1 - 2x_{i-1})v_{i-1}\tau^3 + \frac{1}{8}(x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}^3 - v_{i-1}^2)\tau^4 + \\
 & + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - 3x_{i-1} + 3x_{i-1}^2\right)v_{i-1}\tau^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{16.2}$$

На рисунках 23 – 29 показаны графики решения  $x_i$  (как функции от  $\tau$ ), вычисляемого по формуле (13.2), и графики разложений  $x_i$  по степеням  $\tau$  (в зависимости от  $\tau$ ) с максимальными степенями  $\tau$  от одного до пяти.  $E_0 = -1/12$ . Значения  $x_{i-1}$  берутся различными. Для каждого значения  $x_{i-1}$  (кроме точек возврата, где скорость нулевая) построены графики для отрицательной (на левой части рисунка) и положительной (на правой части) скоростей. Числа, отмеченные на горизонтальной оси – шаг, делённый на период ( $\tau/T$ ), то есть величина шага в долях от периода (как и на предыдущих рисунках). График решения  $x_i$  (вычисляемого по формуле (13.2)) выделен жирной линией. Графики частей рядов пронумерованы. Номер равен максимальной степени  $\tau$  в разложении.



**Рис. 23: Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 0.5$ .**

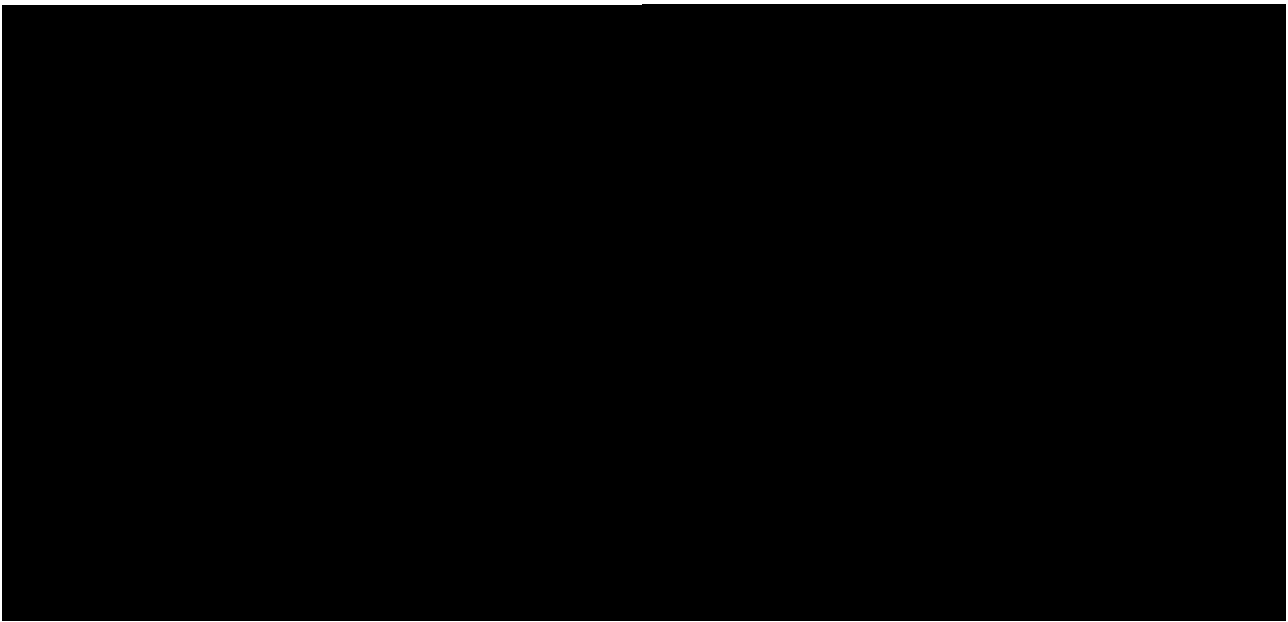
Как это видно из рисунка 23, в точке возврата, где  $v_{i-1} = 0$  и  $x_{i-1} = 0.5$ , разложения в ряд  $x_i$  с максимальными степенями  $\tau$  от 2 до 5 совпадают. Это следует из того, что в членах ряда (16.2) с  $\tau^3$  и  $\tau^5$  есть множители  $v_{i-1}$ , а член с  $\tau^4$  содержит выражение  $x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}^3 - v_{i-1}^2$ , которое обращается в нуль<sup>5</sup> при  $E_0 = -1/12$ ,  $v_{i-1} = 0$  и  $x_{i-1} = 0.5$ .



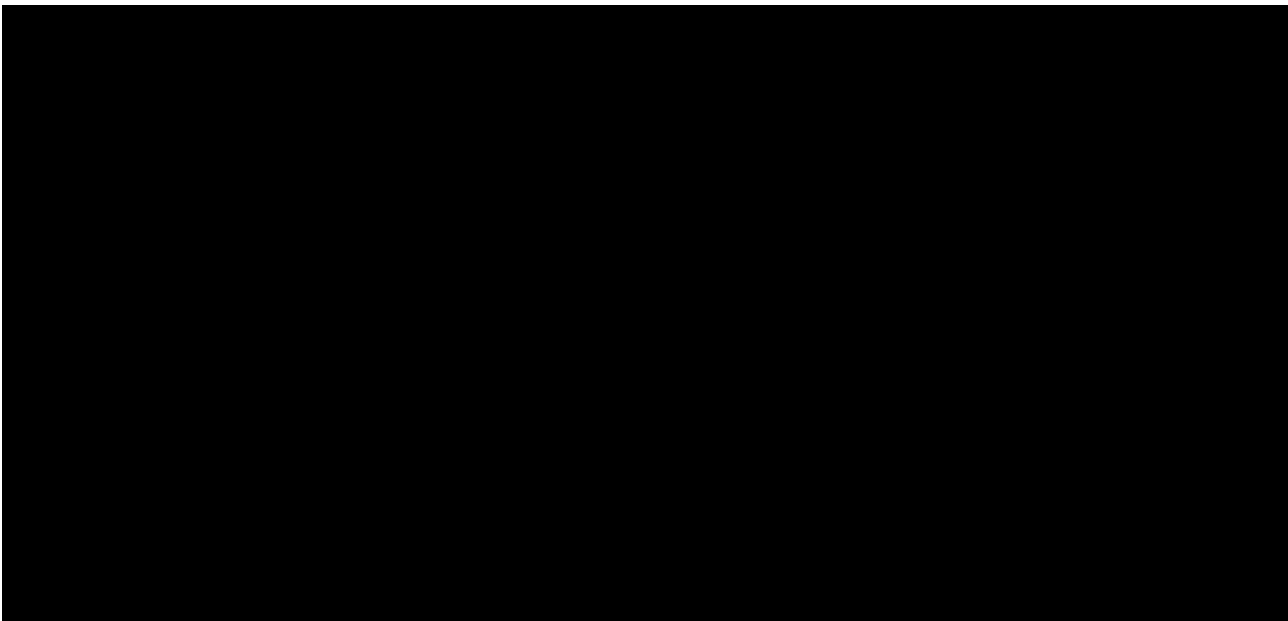
**Рис. 24: Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 0.6$ .**

---

<sup>5</sup> Это следует из уравнения для  $x$  для точки возврата  $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3E_0 = 0$ .



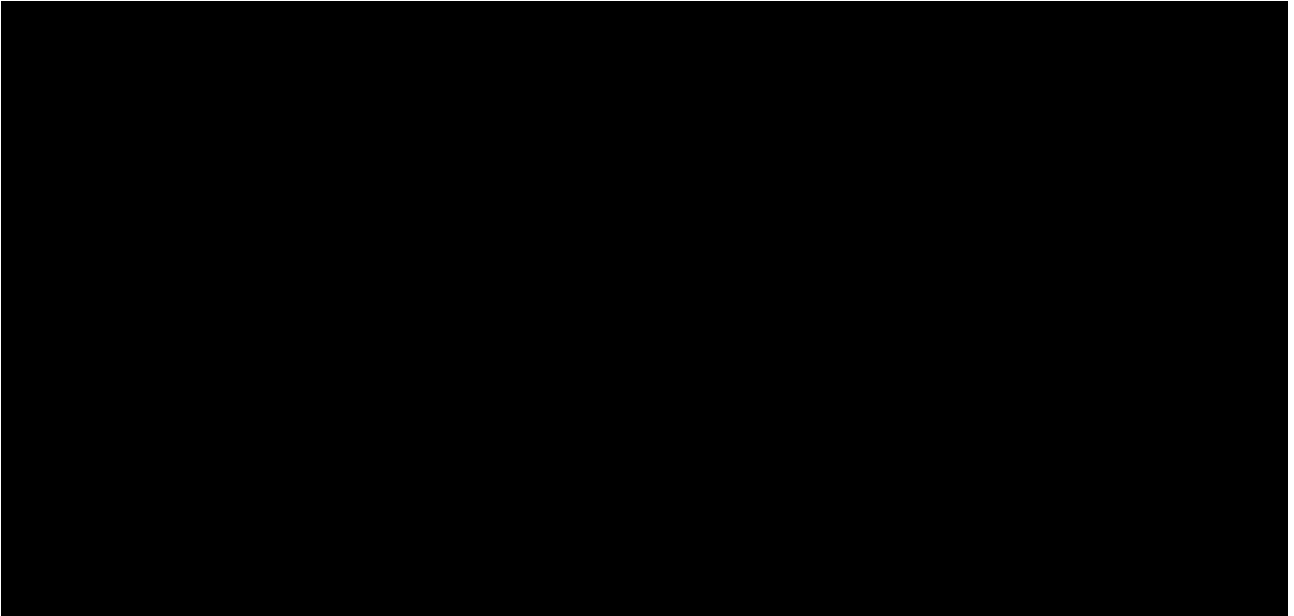
**Рис. 25: Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 0.8$ .**



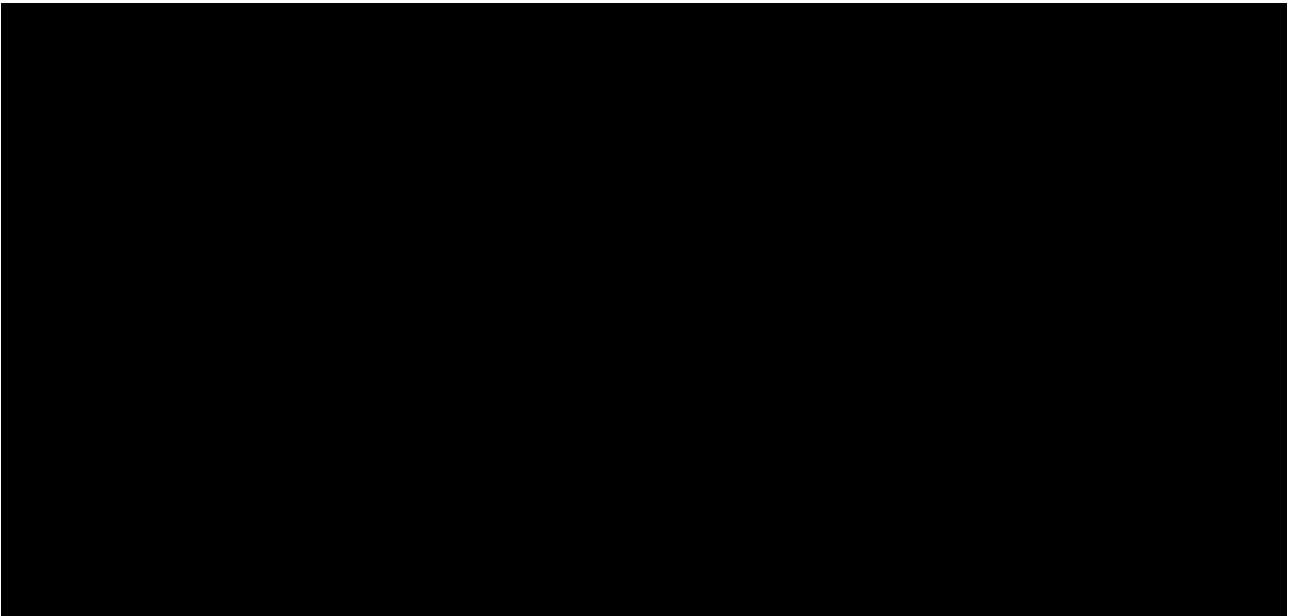
**Рис. 26: Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 1$ .**

При  $x_{i-1} = 1$  графики разложений  $x_i$  по  $\tau$  с максимальными степенями  $\tau$  1 и 2 (то есть линейная и квадратичная части ряда) совпадают. Это следует из того, что член ряда (16.2)

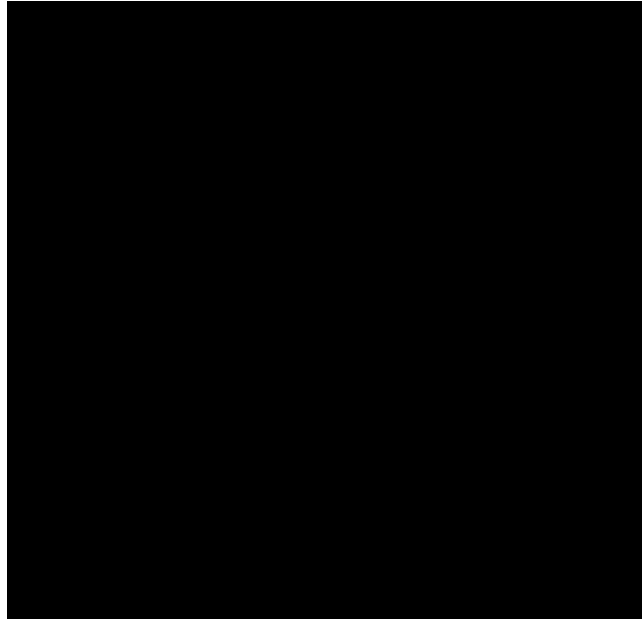
$$\frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i-1}^2) \tau^2 \text{ равен нулю при } x_{i-1} = 1.$$



**Рис. 27:** Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 1.2$ .



**Рис. 28:** Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = 1.3$ .



**Рис. 29:** Графики решения  $x_i$  и его разложений по  $\tau$  при  $x_{i-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

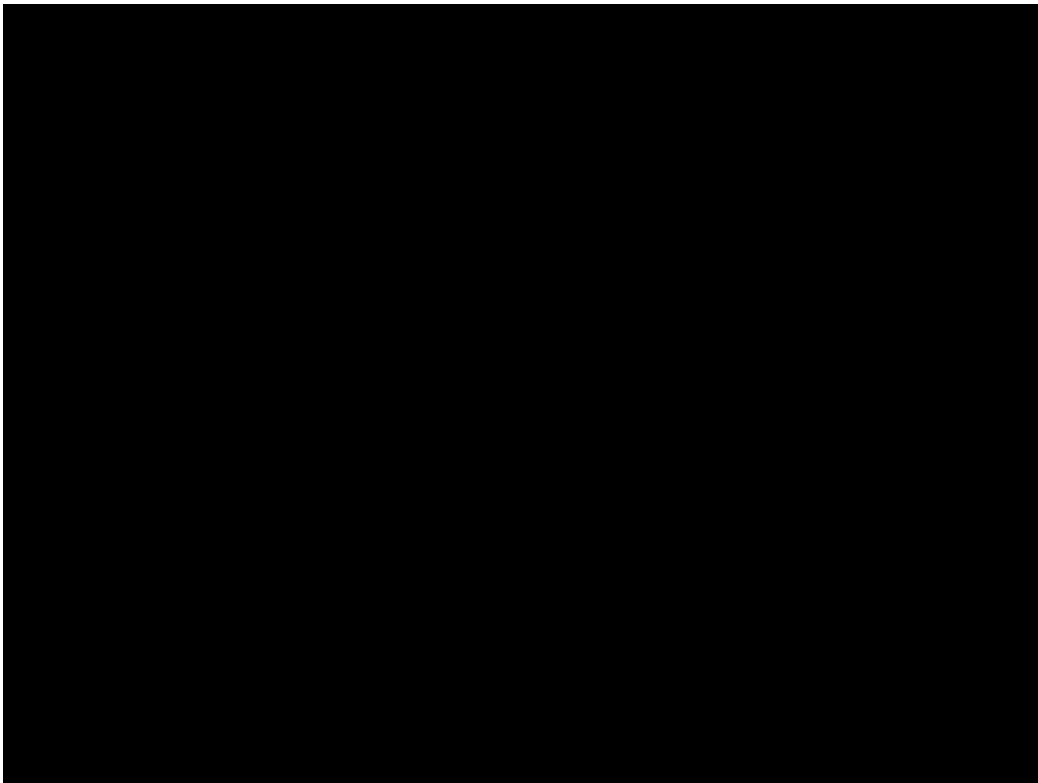
При  $x_{i-1}$ , равном значению координаты в точке возврата  $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ , (и  $v_{i-1} = 0$ ) совпадают графики для разложений  $x_i$  с максимальными степенями  $\tau^2$  и  $3$  и максимальными степенями  $4$  и  $5$ . Это следует из того, что члены ряда (16.2) с  $\tau^3$  и  $\tau^5$  содержат множитель  $v_{i-1}$ .

Из графиков следует, что при  $0 < \tau / T < 0.2$  квадратичная часть ряда по  $\tau$  достаточно хорошо аппроксимирует решение  $x_i$ , по крайней мере, при  $E_0 = -1/12$ .

## 5. Исследование дискриминанта квадратного уравнения для метода средней точки

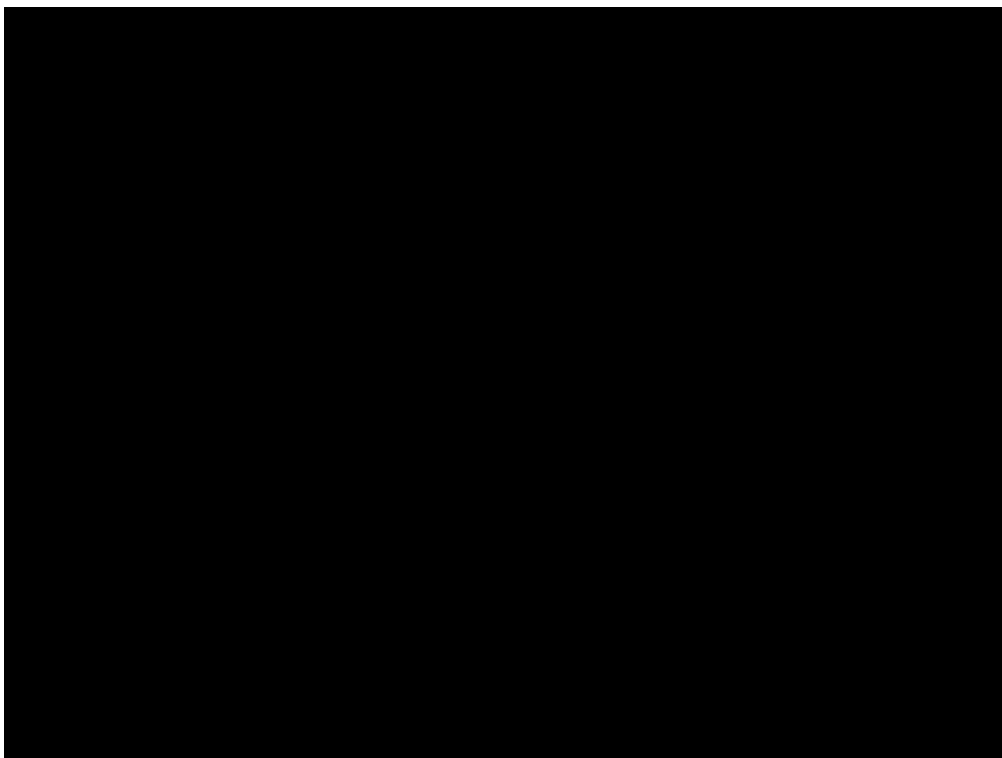
Как показали численные расчёты, проведённые для значений  $E_0 = -1/12; -1/600; -0.165$ , дискриминант  $D$  из формулы (9) положителен при значениях  $\tau$  от нуля до одного периода и при  $x_{i-1}$  лежащих в промежутке  $[x_{\min}; x_{\max}]$ . На рисунках изображены линии уровня дискриминанта в плоскости  $\tau, x_{i-1}$  при различных значениях энергии  $E_0$ . Для каждого значения  $E_0$  было построено по два графика, соответствующие выборам знаков «-» и «+» в формуле (8) (то есть, соответствующие отрицательной и положительной скоростям). Линии уровня пронумерованы. Точка минимума дискриминанта отмечена кружочком, точка максимума – квадратиком.





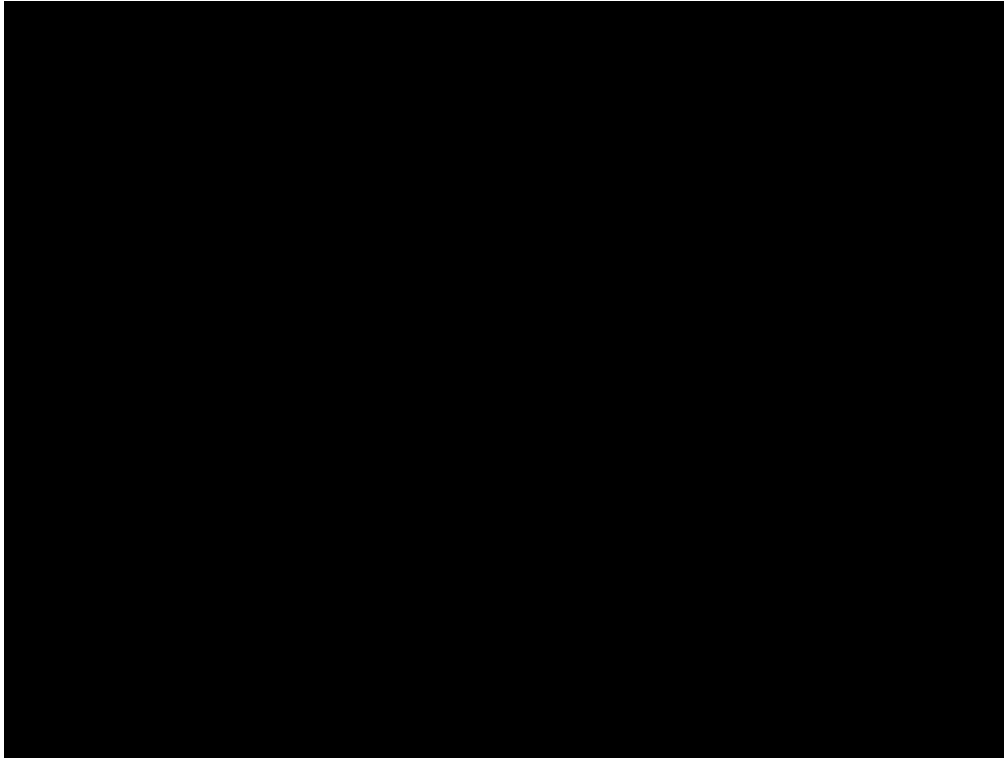
**Рис. 30: Дискриминант при отрицательном значении скорости и  $E_0 = -1/12$ .**

На рисунке 30 номерам линий уровня соответствуют следующие значения дискриминанта: 1: 1.01; 2: 2; 3: 5; 4: 15; 5: 30; 6: 60; 7: 90. Минимум равен 1, максимум 184.056.



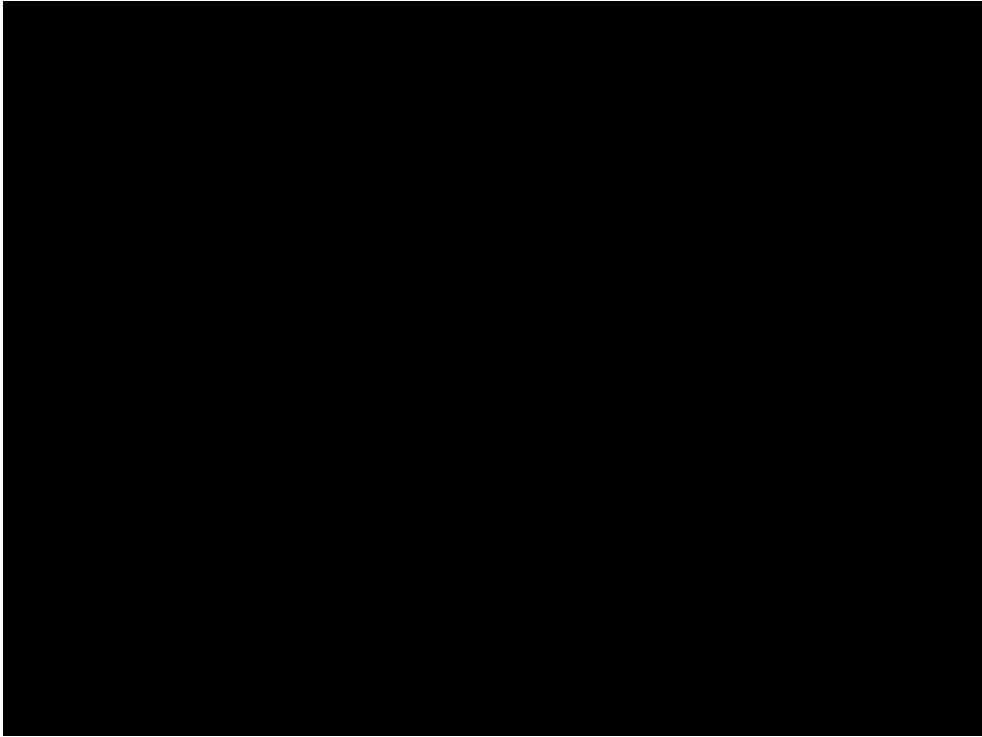
**Рис. 31: Дискриминант при положительном значении скорости и  $E_0 = -1/12$ .**

На рисунке 31 номерам линий уровня соответствуют следующие значения дискриминанта: 1: 1.01; 2: 2; 3: 10; 4: 30; 5: 60; 6: 100; 7: 200. Минимум равен 1, максимум 236.309.



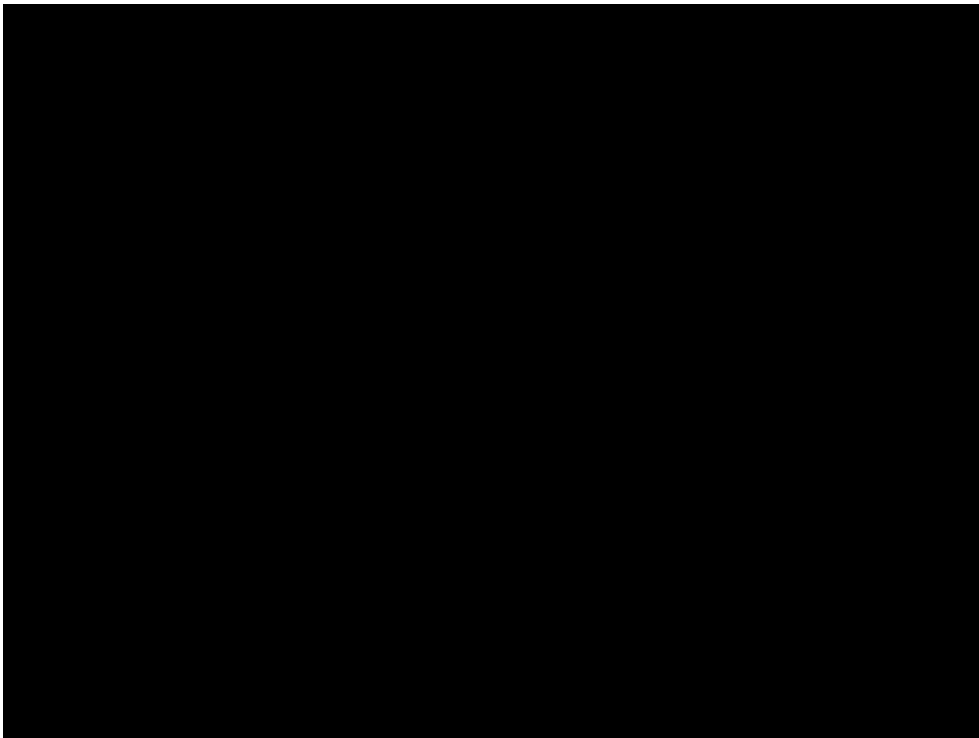
**Рис. 32: Дискриминант при отрицательном значении скорости и  $E_0 = -1/600$ .**

На рисунке 32 номерам линий уровня соответствуют следующие значения дискриминанта: 1: 0.1; 2: 0.5; 3: 1; 4: 2; 5: 5; 6: 50; 7: 200; 8: 500. Минимум равен 0.068, максимум 888.146.



**Рис. 33: Дискриминант при положительном значении скорости и  $E_0 = - 1/600$ .**

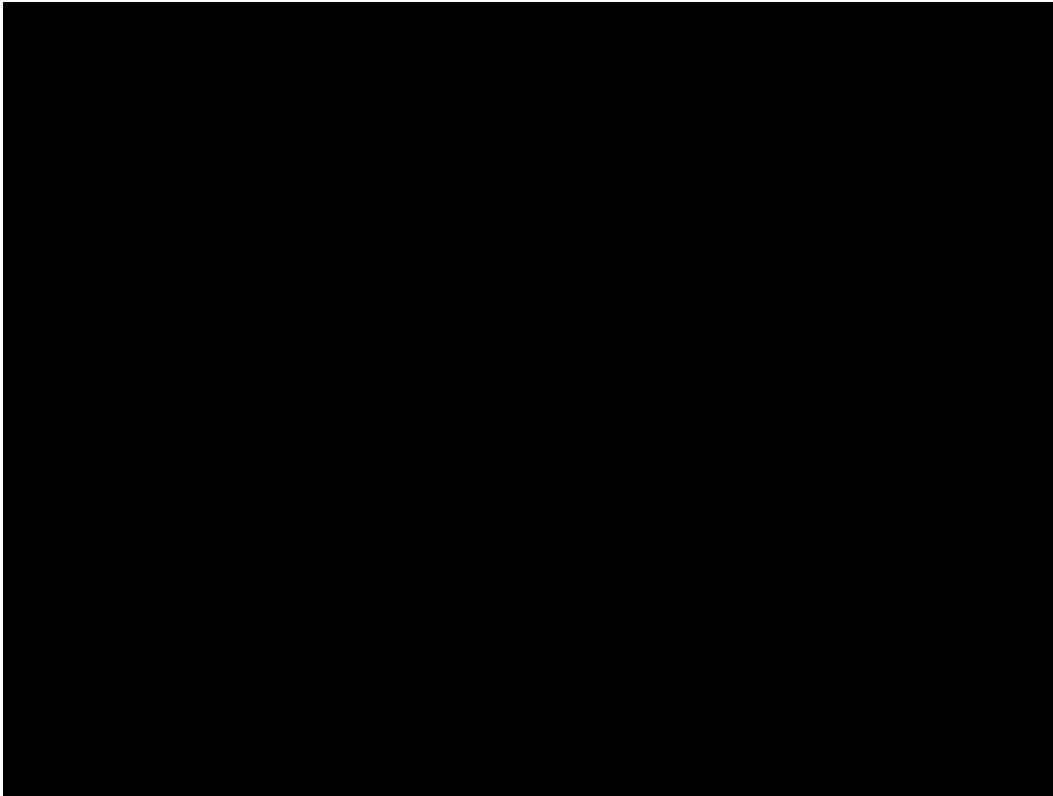
На рисунке 33 номерам линий уровня соответствуют следующие значения дискриминанта: 1: 0.7; 2: 1; 3: 2; 4: 10; 5: 50; 6: 200; 7: 500; 8: 1000. Минимум равен 0.289, максимум 1227.292.



**Рис. 34: Дискриминант при отрицательном значении скорости и  $E_0 = - 0/165$ .**

На рисунке 34 номерам линий уровня соответствуют следующие значения

дискриминанта: 1: 1.01; 2: 1.5; 3: 2.5; 4: 5; 5: 10; 6: 25; 7: 50; 8: 100. Минимум равен 1, максимум 120.992.



**Рис. 35: Дискриминант при положительном значении скорости и  $E_0 = -0/165$ .**

На рисунке 35 номерам линий уровня соответствуют следующие значения дискриминанта: 1: 1.01; 2: 1.5; 3: 2.5; 4: 5; 5: 10; 6: 25; 7: 50; 8: 100. Минимум равен 1, максимум 126.29.

## 6. Выводы

Точное решение разрешающих уравнений, аппроксимирующее при малых  $\tau$  решение задачи Коши, ограничено при  $\tau \rightarrow +\infty$  и хорошо приближается отрезками степенного ряда при  $\tau/T \in (0, 0.2)$ .

## Литература

1. E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Second Edition. Springer. 2006.
2. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1968.