

**УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ**

Александров П. А., Еленин Г. Г.

**Число решений системы
разрешающих уравнений семейства
симметрично-симплектических
методов Рунге-Кутты для задачи
о движении материальной точки
в поле кубического потенциала**

МОСКВА – 2010

УДК 519.622.2

Александров Петр Александрович
Еленин Георгий Георгиевич

Это электронная версия препринта, опубликованного со следующими выходными данными: «Число решений системы разрешающих уравнений семейства симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты для задачи о движении материальной точки в поле кубического потенциала. Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 40 с.».

Работа содержит результаты исследования системы нелинейных разрешающих уравнений однопараметрического семейства двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты, возникающей при приближенном решении задачи Коши об одномерном движении материальной точки в поле кубического потенциала. Показано, что в зависимости от значений шага метода и параметра семейства уравнения могут либо не иметь решения, либо иметь два или четыре простых решения. Лишь одно из существующих решений аппроксимирует точное решение задачи Коши о движении материальной точки. Определена область несуществования решений. Найдены точные границы областей с различным числом решений.

Почтовый адрес авторов:
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М. В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, факультет ВМК,

электронная почта: elenin2@rambler.ru
телефон: (495)-939-18-89

*Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 09-01-12098-офи-м) и
Федеральной Целевой Программы
«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009-2013 гг.»*

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию системы разрешающих уравнений однопараметрического семейства двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты, возникающей при решении задачи Коши об одномерном финитном движении материальной точки в поле кубического потенциала. Показано, что разрешающие уравнения в зависимости от значений шага методов и параметра семейства могут либо не иметь решений, либо иметь два или четыре решения. Среди существующих решений системы разрешающих уравнений лишь одно аппроксимирует точное решение исходной задачи Коши для дифференциальных уравнений движения. Найдены уравнения границ областей с различным числом решений в виде многочленов по степеням шага и свободного параметра семейства.

1. Постановка задачи

Модельная задача. Рассмотрим финитное одномерное движение материальной точки единичной массы в поле кубического потенциала $u(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Такие движения описываются решениями $v = v(t)$, $x = x(t)$, $t > t_0$ следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{du(x)}{dx} = g(x) = x - x^2, \\ \frac{dx}{dt} = v, \\ v(t_0) = v_0, \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Функции $v(t)$ и $x(t)$ определяют скорость и положение материальной точки в момент времени $t > t_0$. Функция $u = u(x)$ определяет зависимость потенциальной энергии от положения материальной точки. Решение задачи (1) осуществляет преобразование ϕ_t начального состояния системы $\{v_0, x_0\}$ в текущее состояние $\{v(t), x(t)\}$.

Качественный анализ задачи (1) показывает, что финитное движение материальной точки существует для начальных условий, удовлетворяющих следующим ограничениям

$$0 < x_0 < 1.5, \quad 0 < v_0 < x_0 \sqrt{1 - \frac{2}{3}x_0} \quad (2)$$

и является периодическим

$$v(t) = v(t + T), x(t) = x(t + T), t \in [0, T], T > 2\pi. \quad (3)$$

Период T зависит от начальных условий и неограниченно возрастает при

$$0.5v_0^2 + \frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2 \rightarrow 0 - 0.$$

При $x_0 = 1, v_0 = 0$ решение задачи (1) описывает устойчивое по Ляпунову стационарное состояние $x(t) \equiv 1, v(t) \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$.

При $x_0 = 0, v_0 = 0$ решение задачи (1) соответствует неустойчивому по Ляпунову стационарному состоянию $x(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0, t \in [0, +\infty)$. Исчезающе малые возмущения этого начального условия приводят либо к ангармоническим колебаниям с большим периодом $T \gg 2\pi$, либо к инфинитному движению, при котором материальная точка удаляется на «минус бесконечность» за конечное время T_∞ .

Во всех остальных случаях осуществляется инфинитное движение, при котором материальная точка удаляется на «минус бесконечность» за конечное время.

На рис. 1 изображена потенциальная «яма», в которой происходит финитное движение материальной точки $0 \leq x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \leq 1.5$.

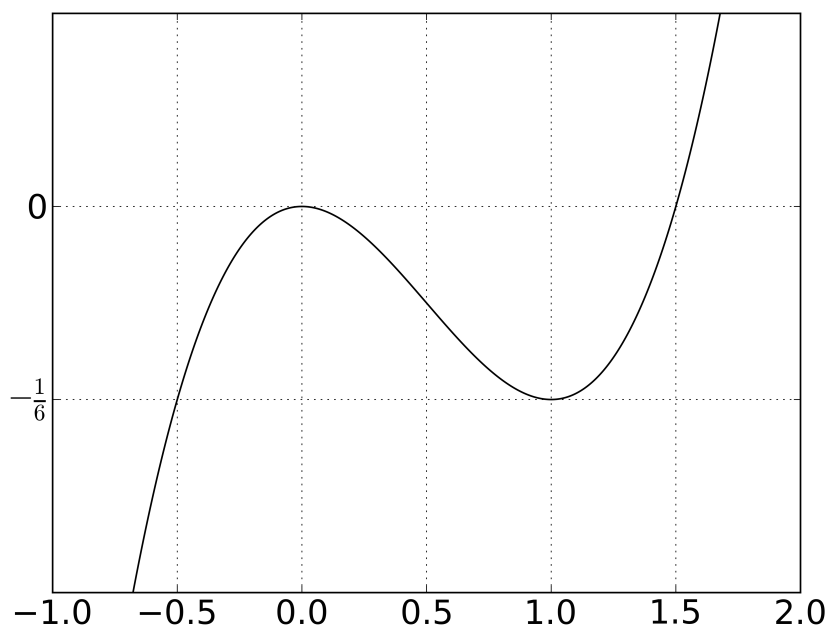


Рис. 1. Зависимость потенциальной энергии от положения материальной точки.

На рис. 2 представлены зависимости скорости v и координаты x от времени t для начальных условий $x_0 = 1, v_0 = 6^{-0.5}$. Заметен ангармонизм колебательного движения материальной точки,

усиливающийся при возрастании $|v_0|$.

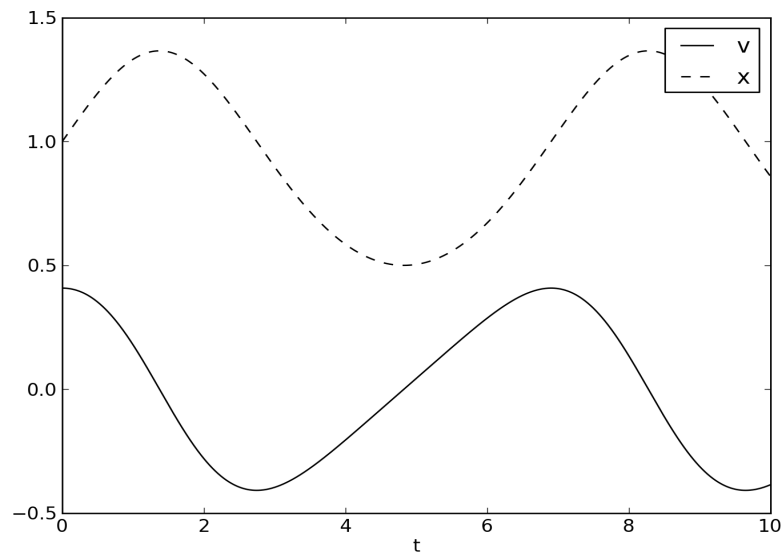


Рис. 2. Графики решения задачи Коши на отрезке времени, превышающем период $T \approx 6.9$.

На рис. 3 показана траектория в фазовой плоскости (v, x) . Стрелкой указано направление движения точки, определяющей состояние, по траектории. Заметно отклонение формы фазовой траектории от эллипса.

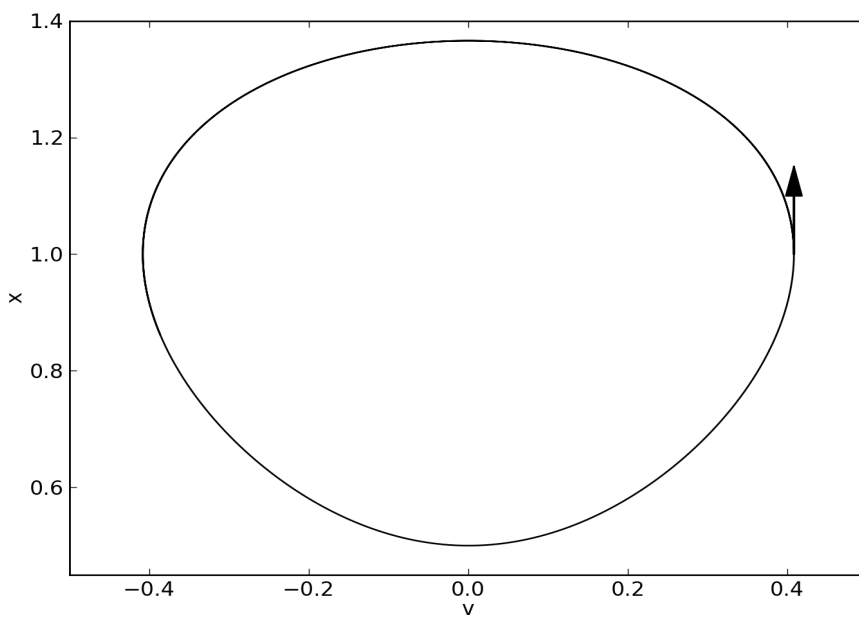


Рис. 3. Траектория решения в фазовой плоскости для $x_0 = 1, v_0 = 6^{-0.5}$.

Глобальные свойства решений задачи. Как известно [1], решение задачи Коши (1) осуществляет симплектическое преобразование начального состояния (v_0, x_0) в текущее состояние $(v(t), x(t))$

$$\left(\frac{\partial(v(t), x(t))}{\partial(v_0, x_0)} \right)^T \mathbf{J} \left(\frac{\partial(v(t), x(t))}{\partial(v_0, x_0)} \right) = \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

является обратимым во времени

$$(v_0, x_0) \xrightarrow{\Phi_t} (v(t), x(t)) \xrightarrow{R} (-v(t), x(t)) \xrightarrow{\Phi_t} (v(2t), x(2t)) \xrightarrow{R} (v_0, x_0),$$

и сохраняет полную энергию

$$E(t) = 0.5v^2(t) + \frac{1}{3}x^3(t) - \frac{1}{2}x^2(t) = E(0) = 0.5v_0^2 + \frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2.$$

Требования к численным методам решения задачи Коши. При приближенном решении задачи естественно потребовать от численного метода достаточного порядка аппроксимации, устойчивости и сохранения перечисленных глобальных алгебраических свойств.

В настоящей работе исследуется семейство двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты. Эти методы имеют или второй, или четвертый порядок аппроксимации, осуществляют симплектическое отображение на одном шаге и дают решение, обратимое на одном шаге в рамках точной арифметики.

2. Разрешающие уравнения семейства двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты

Применительно к поставленной модельной задаче формулы семейства методов, имеющих, по крайней мере, второй порядок аппроксимации принимают вид

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i-1} + 0.5\tau(k_{11} + k_{21}), \\ x_i &= x_{i-1} + 0.5\tau(k_{12} + k_{22}), \\ \begin{cases} k_{11} = g(x_{i-1} + \tau(0.25k_{12} + a_{12}k_{22})) \\ k_{12} = v_{i-1} + \tau(0.25k_{11} + a_{12}k_{21}) \\ k_{21} = g(x_{i-1} + \tau((0.5 - a_{12})k_{12} + 0.25k_{22})) \\ k_{22} = v_{i-1} + \tau((0.5 - a_{12})k_{11} + 0.25k_{21}), \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

где a_{12} — параметр семейства, τ — шаг по времени.

При $\tau = 0$ система уравнений (4) имеет единственное решение

$$k_{11} = k_{21} = g(x_{i-1}), \quad k_{12} = k_{22} = v_{i-1} \quad (5)$$

и

$$v_i = v_{i-1}, \quad x_i = x_{i-1}. \quad (6)$$

Вырождение семейства методов. При $a_{12} = 0.25$, $\tau \neq 0$ происходит вырождение семейства двухстадийных методов в одностадийный симметрично-симплектический метод — метод средней точки

$$k_{11} = g(x_{i-1} + 0.5\tau v_{i-1} + 0.25\tau^2 k_{11}), \quad (7)$$

$$v_i = v_{i-1} + \tau k_{11}, \quad x_i = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5\tau^2 k_{11}. \quad (8)$$

Точное решение разрешающих уравнений метода средней точки. Разрешающее уравнение (7) является квадратным и содержит малый параметр τ при старшей степени

$$\begin{aligned} & \tau^4 k_{11}^2 + 16 \left(1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \right) k_{11} + \\ & + 16 \left(-(x_{i-1} - x_{i-1}^2) - \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

При выполнении неравенства

$$D = 1 - \frac{\tau^2}{2} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{2} v_{i-1} + \frac{\tau^4}{16} < 0 \quad (9)$$

уравнение (7) не имеет действительных решений. При выполнении условия

$$D \geq 0 \quad (10)$$

оно имеет либо одно действительное двукратное решение ($D = 0$)

$$k_{11} = \frac{1}{4} - \frac{4}{\tau^4}, \quad (11)$$

либо два действительных простых решения ($D > 0$)

$$\begin{aligned} k_{11,1} = & 2 \left(x_{i-1} - x_{i-1}^2 + \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) - \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right) \cdot \\ & \cdot \left[1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} + \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{2} v_{i-1} + \frac{\tau^4}{16}} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$k_{11,2} = -\frac{8}{\tau^4} \left[1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} + \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{\tau^2}{4} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{4} v_{i-1} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2} (1 - 2x_{i-1}) + \frac{\tau^3}{2} v_{i-1} + \frac{\tau^4}{16}} \right]. \quad (12.2)$$

При достаточно малых τ лишь решение $k_{11,1}$ дает аппроксимацию точного решения исходной задачи Коши

$$v_i = v_{i-1} + \tau k_{11,1} = v_{i-1} + \tau \left[x_{i-1} - x_{i-1}^2 + \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) - \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right] e^{-1}, \quad (13.1)$$

$$x_i = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5 \tau^2 k_{11,1} = x_{i-1} + \tau v_{i-1} + 0.5 \tau^2 \left(x_{i-1} - x_{i-1}^2 + \frac{\tau}{2} v_{i-1} (1 - 2x_{i-1}) - \frac{\tau^2}{4} v_{i-1}^2 \right) e^{-1}, \quad (13.2)$$

$$e = 0.5 \left[1 - \frac{1}{4} (1 - 2x_{i-1}) \tau^2 + \frac{1}{4} v_{i-1} \tau^3 + \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{1}{4} (1 - 2x_{i-1}) \tau^2 + \frac{1}{4} v_{i-1} \tau^3 \right) D \right],$$

$$D = \sqrt{1 - \frac{1}{2} (1 - 2x_{i-1}) \tau^2 + \frac{1}{2} v_{i-1} \tau^3 + \frac{1}{16} \tau^4}.$$

Решение $k_{11,2}$ является «паразитным».

Однократно диагонально неявный метод. При $a_{12} = 0$ или 0.5 метод является однократно диагональным. Решение разрешающих уравнений для этого случая будет представлено ниже.

Метод четвертого порядка аппроксимации. При $a_{12} = 0.25 \pm 0.5 \cdot 3^{-0.5}$ неявный метод имеет четвертый порядок аппроксимации [1].

Основной вопрос. Система разрешающих уравнений (4) при $\tau \neq 0$, $a_{12} \neq 0, 0.25, 0.5$ в зависимости от значений параметров вычислительного метода τ , a_{12} и параметров приближенного решения x_{i-1} , v_{i-1} может либо не иметь действительных решений, либо иметь определенное число действительных решений $\{(k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})\}$. В дальнейшем будем предполагать, что параметры решения x_{i-1} , v_{i-1} связаны уравнением сохранения полной энергии

$$0.5 v_{i-1}^2 + \frac{1}{3} x_{i-1}^3 - \frac{1}{2} x_{i-1}^2 = E_0 = 0.5 v_0^2 + \frac{1}{3} x_0^3 - \frac{1}{2} x_0^2,$$

поэтому

$$v_{i-1} = \pm \sqrt{2 E_0 + x_{i-1}^2 - \frac{2}{3} x_{i-1}^3}, \quad 0 < x_{\min} < x_{i-1} < x_{\max}, \quad (14)$$

где x_{\min} , x_{\max} — средний и больший по величине корни уравнения

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3E_0 = 0. \quad (15)$$

Кроме того, вместо параметра a_{12} будем использовать более удобный параметр $d = a_{12} - 0.25$.

Представляет интерес определить области несуществования действительных решений системы разрешающих уравнений (4), а также области существования различного числа действительных решений в терминах параметров x_{i-1} , \pm , d , τ . Обозначение \pm означает выбор определенного знака + или – в формуле (14).

Заметим, что при малых τ система (4) является сингулярно возмущенной.

3. Основные результаты

1. В работе установлено, что число простых действительных решений N разрешающей системы уравнений (4) определяется с помощью следующей формулы [2]

$$N = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha_2 < 0, A_2 < 0, r_2 > 0; \alpha_2 < 0, A_2 > 0, r_2 > 0; \alpha_2 > 0, A_2 < 0, r_2 > 0 \\ 2, & \text{при } \alpha_2 < 0, A_2 < 0, r_2 < 0; \alpha_2 > 0, A_2 < 0, r_2 < 0; \alpha_2 > 0, A_2 > 0, r_2 < 0 \\ 4, & \text{при } \alpha_2 > 0, A_2 > 0, r_2 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

где α_2 , A_2 , r_2 — многочлены от τ , d , x_{i-1} , v_{i-1} . Конкретный вид этих многочленов приведен в приложении.

2. В прямоугольнике $0 < x_{\min} < x_{i-1} < x_{\max}$, $-d_l < d < d_l$, $d_l = 3.0$ для набора шагов $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, составляющих определенные части периода T , выделены области G_0 , G_2 , G_4 (см. рис. 4 — 34). На рисунках значения $\pm d_4$ соответствуют методу четвертого порядка аппроксимации ($d_4 = 0.5 \cdot 3^{-0.5}$). Область G_0 , в которой разрешающие уравнения не имеют действительных решений, закрашена черным цветом. Область G_2 , в которой существуют два простых действительных решения, представлена темно-серой. Наконец, область G_4 , в которой разрешающие уравнения имеют четыре простые действительные решения, является светло-серой. Геометрическая структура разбиения прямоугольника на области с различным числом действительных решений зависит от того, какой знак выбран для v_{i-1} в формуле (14). На рисунках, представленных ниже, левый рисунок соответствует выбору знака «плюс», а правый — знаку «минус».

Граница $B_{0,2}$ между областями G_0 и G_2 определяется уравнением

$$r_2(\tau, d, x_{i-1}, v_{i-1}) = 0, \quad (17)$$

дополненным неравенствами (18), (19), (20)

$$\beta_1 \geq 0, \quad (18)$$

$$64d^8\tau^4 - 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 - 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 + 64d^3 - 8d - 1 < 0, \quad (19)$$

$$\begin{cases} 64d^8\tau^4 - 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 - 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 + 64d^3 - 8d - 1 \geq 0, \\ 64d^8\tau^4 + 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 + 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 - 64d^3 + 8d - 1 < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Для точек на границе $\mathbf{B}_{0,2}$ система разрешающих уравнений имеет одно двукратное решение.

4. Граница $\mathbf{B}_{2,4}$ между областями \mathbf{G}_2 и \mathbf{G}_4 определяется уравнением (17), дополненным следующими условиями (21), (22), (23):

$$64d^8\tau^4 - 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 - 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 + 64d^3 - 8d - 1 > 0, \quad (21)$$

$$64d^8\tau^4 + 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 + 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 - 64d^3 + 8d - 1 > 0, \quad (22)$$

$$\alpha_1^2 + 12\beta_1 \leq 0. \quad (23)$$

Для параметров, расположенных на границе $\mathbf{B}_{2,4}$, разрешающие уравнения имеют либо два различных однократных решения и одно двукратное решение ($\alpha_1^2 + 12\beta_1 < 0$), либо одно однократное и одно трехкратное решение ($\alpha_1^2 + 12\beta_1 = 0$). В тех местах границы $\mathbf{B}_{2,4}$, где выполняется равенство $\alpha_1^2 + 12\beta_1 = 0$ имеется ее особенность (см. рис. 6 — 9, 17, 23, 24, 29, 30).

5. Граница $\mathbf{B}_{0,4}$ между областями \mathbf{G}_0 и \mathbf{G}_4 на финитных решениях задачи Коши не существует.

6. При $\tau \rightarrow 0$ граница между областями \mathbf{G}_2 и \mathbf{G}_4 стремится к линиям $d = d^* \approx \pm 2,0322$. Величины d^* являются действительными корнями уравнения $256d^8 - 1024d^6 - 144d^4 + 28d^2 - 1 = 0$.

7. На рисунках 4 — 16 представлена структура разбиения плоскости $\{x_{i-1}, d\}$ на области с различными числами простых действительных решений для $E = -1/12$ при различных значениях параметра τ . Период решения задачи Коши $T \approx 6.9$.

$\tau=0.01; \tau/T \approx 0.00145$

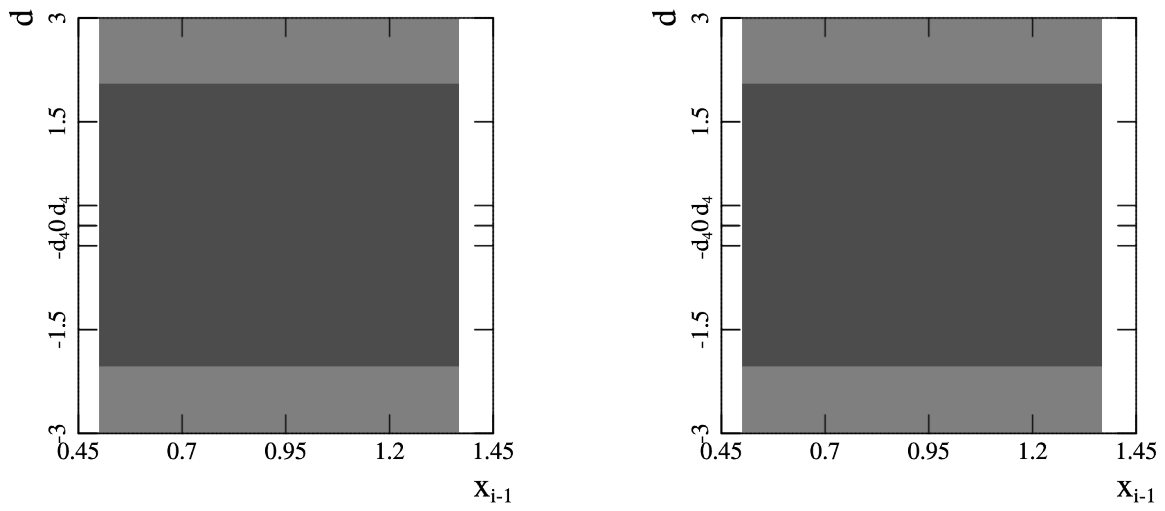


Рис. 4. Области определенного числа решений при $E = -1/12$

$\tau=0.1; \tau/T \approx 0.0145$

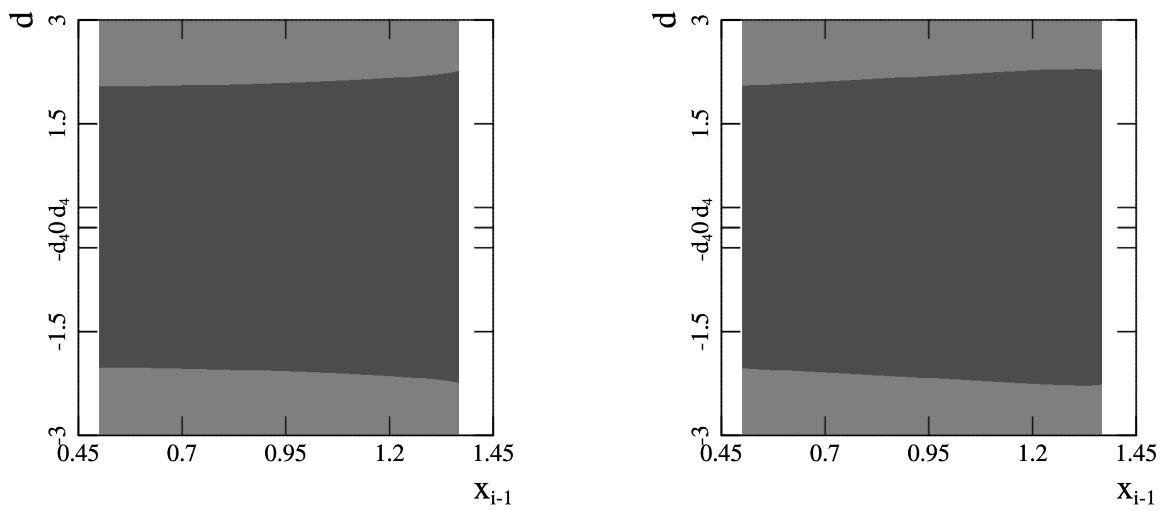


Рис. 5. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=0.2; \tau/T \approx 0.029$

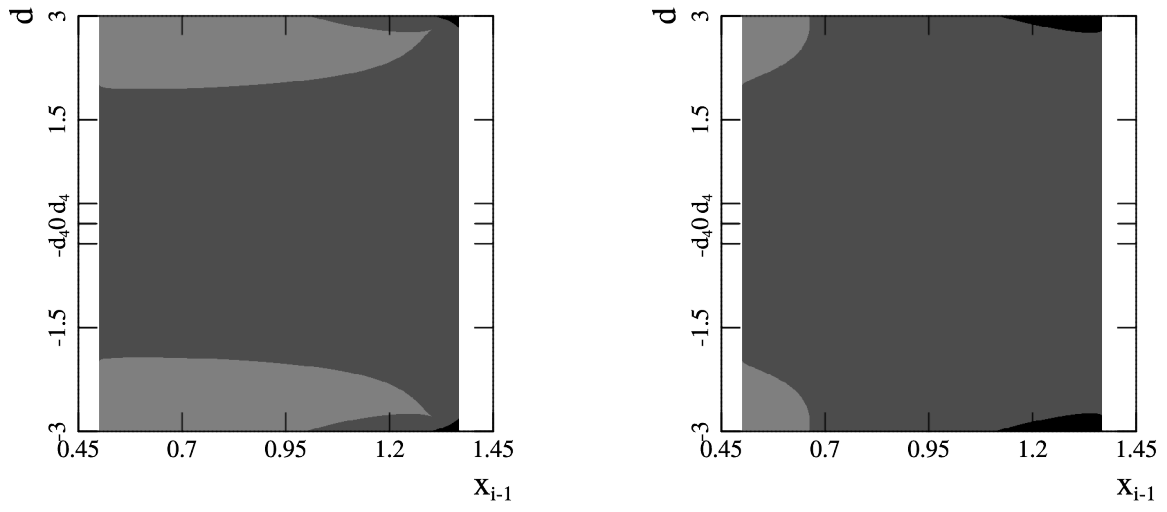


Рис. 6. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=0.5; \tau/T \approx 0.0725$

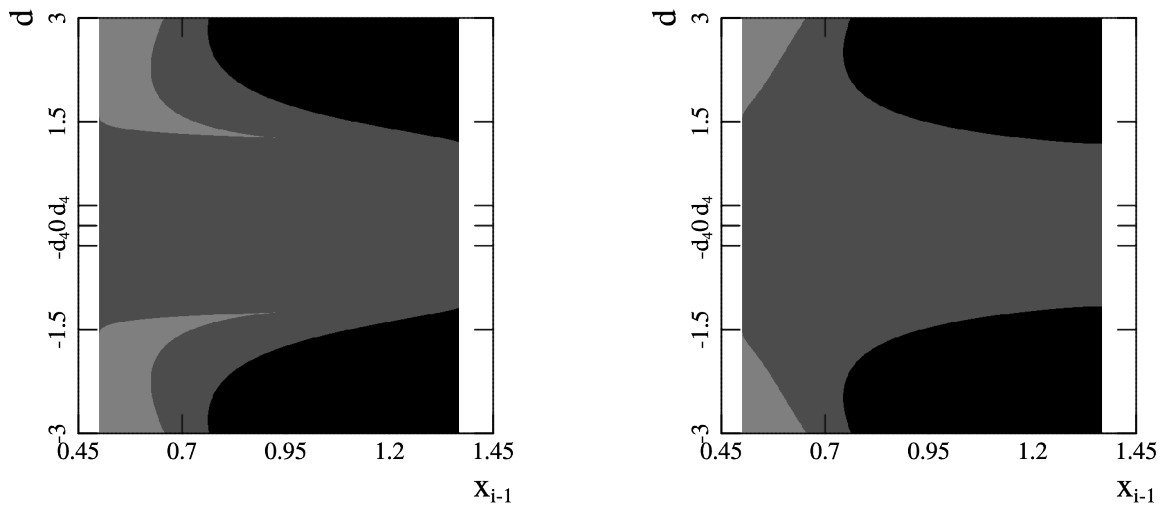


Рис. 7. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=1; \tau/T \approx 0.145$

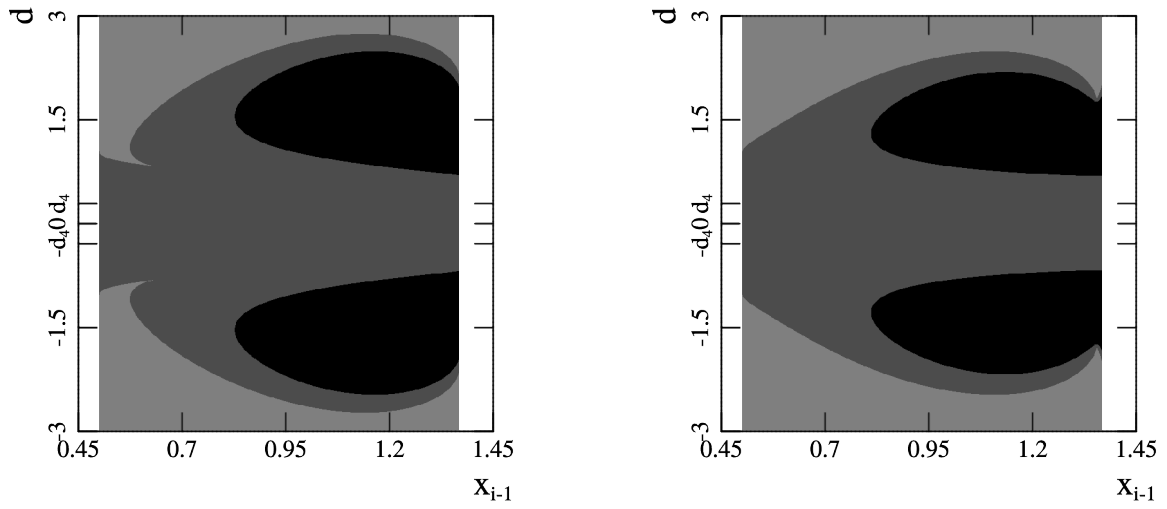


Рис. 8. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=1.5; \tau/T \approx 0.217$

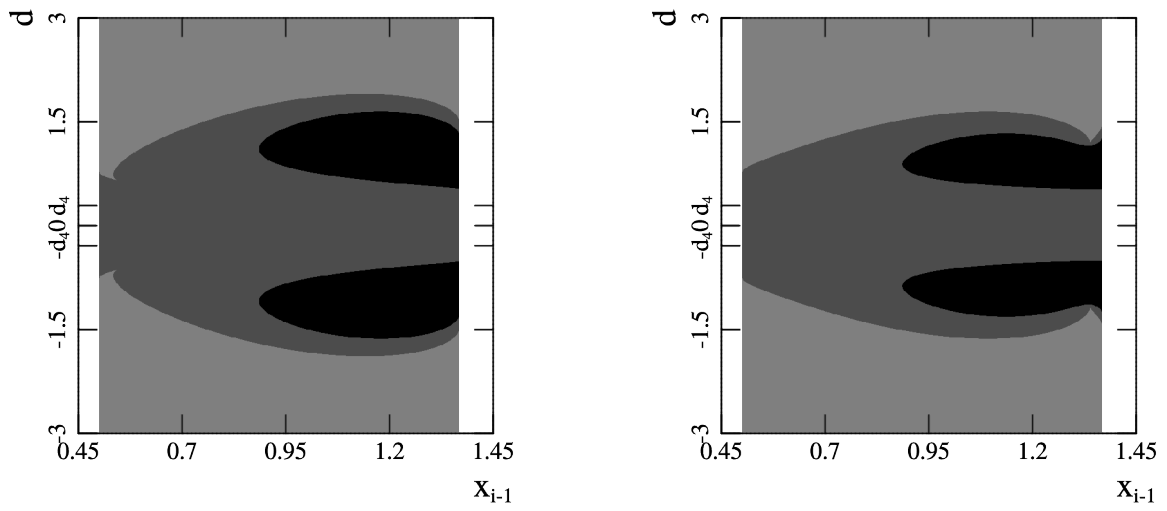


Рис. 9. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=4.25; \tau/T \approx 0.616$

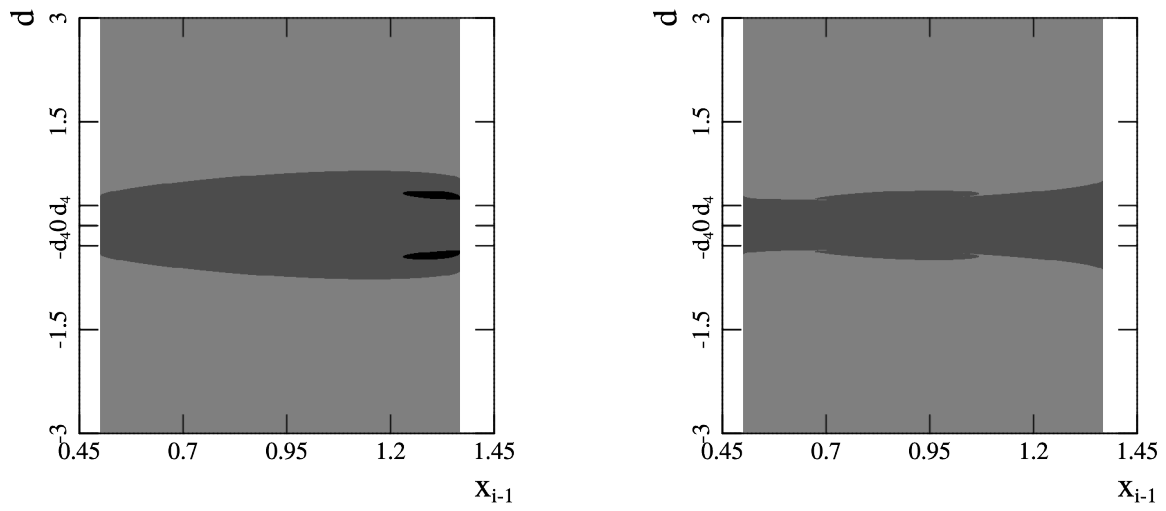


Рис. 10. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=4.5; \tau/T \approx 0.652$

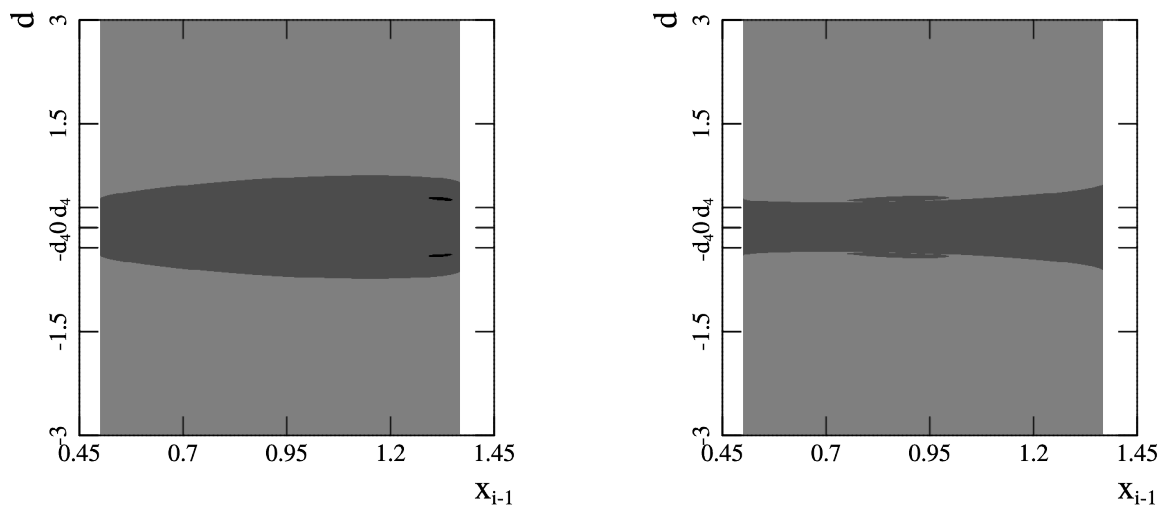


Рис. 11. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=4.75; \tau/T \approx 0.688$

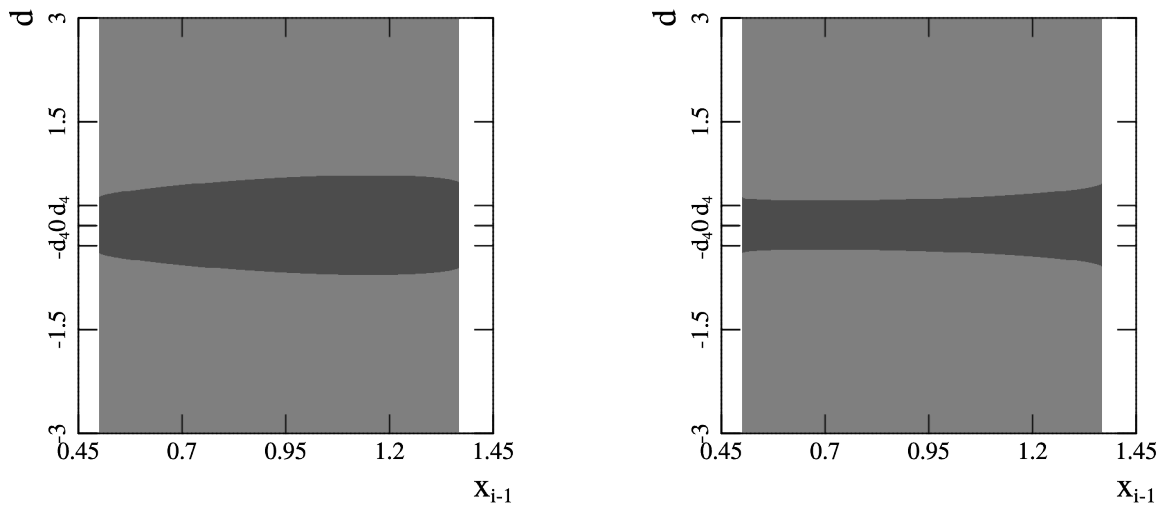


Рис. 12. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=5; \tau/T \approx 0.725$

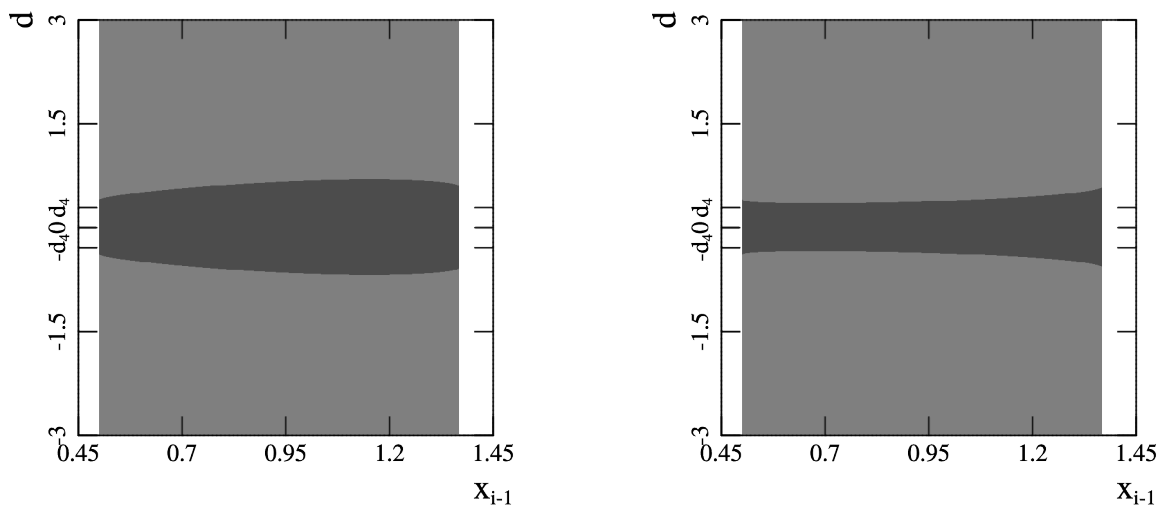


Рис. 13. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=6.9; \tau/T \approx 1$

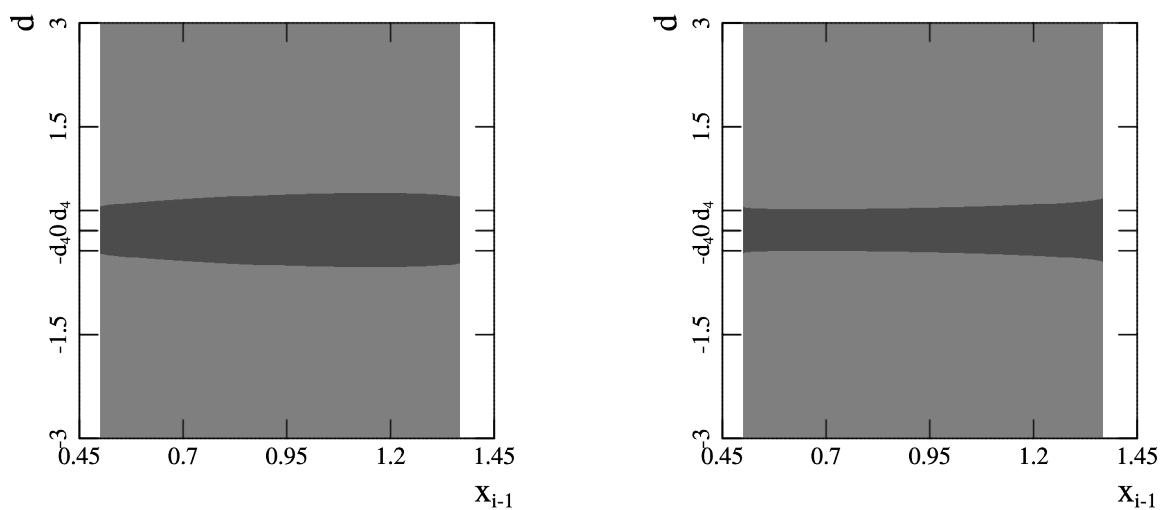


Рис. 14. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=10; \tau/T \approx 1.45$

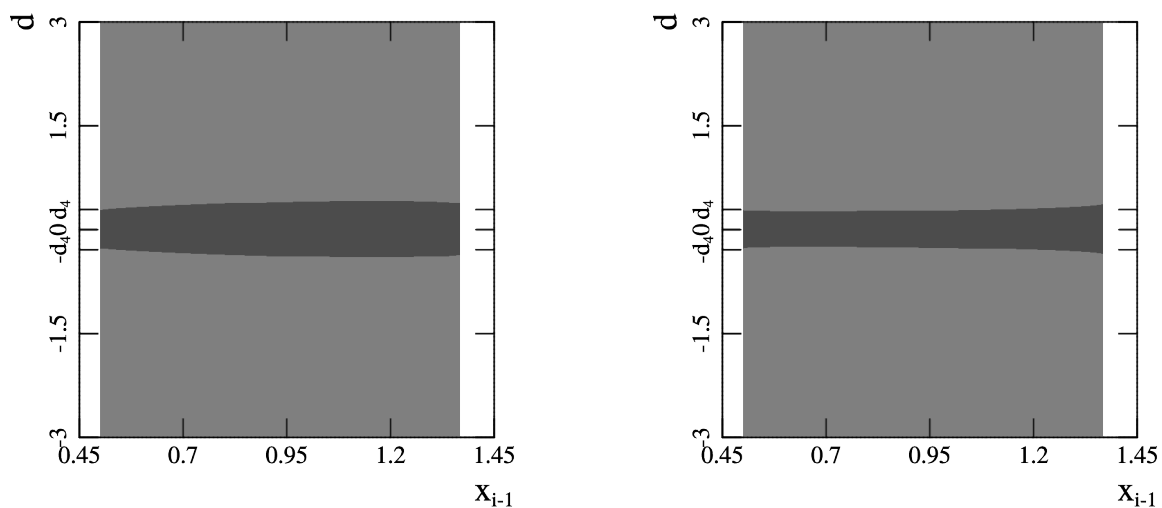


Рис. 15. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$$\tau=13.8; \tau/T \approx 2$$

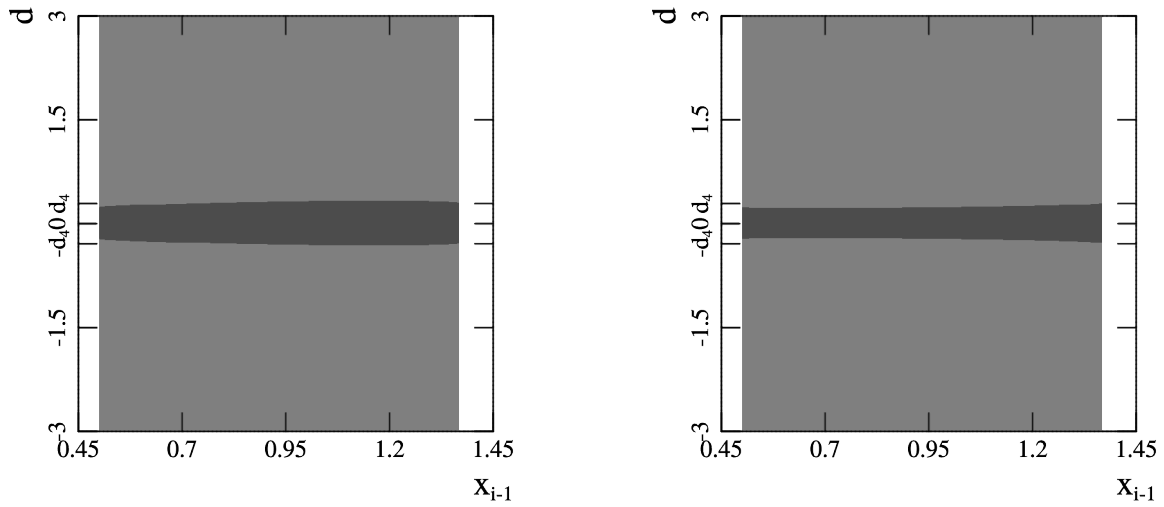


Рис. 16. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

На следующих рисунках 17 — 20 показано, как исчезает область несуществования решений (левые рисунки) и как образуется островок области существования двух решений (правые рисунки) в прямоугольнике параметров x_{i-1} , d при увеличении параметра τ в диапазоне $4.4 \div 4.7$.

$$\tau=4.4; \tau/T \approx 0.638$$

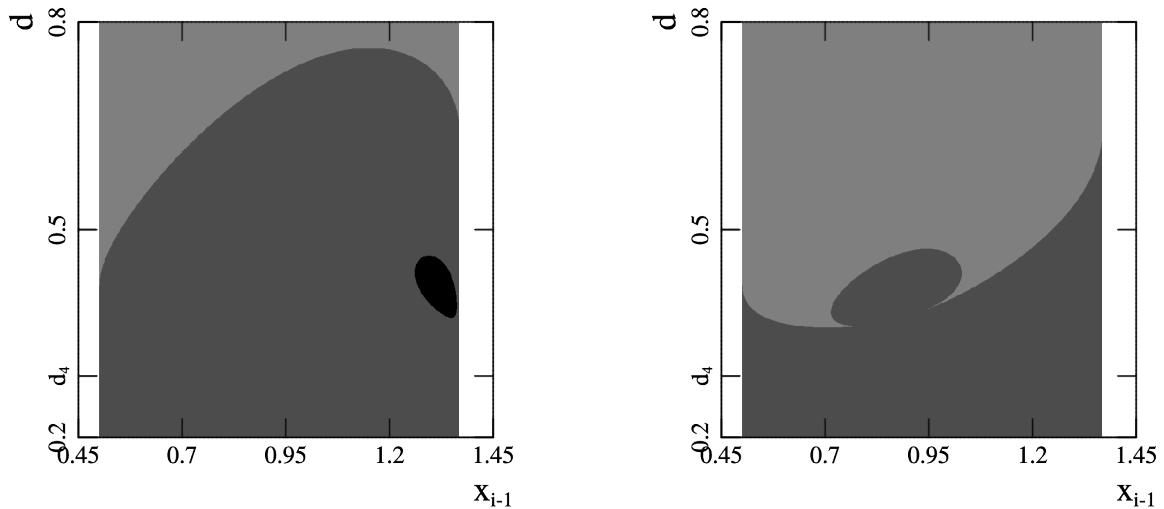


Рис. 17. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=4.5; \tau/T \approx 0.652$

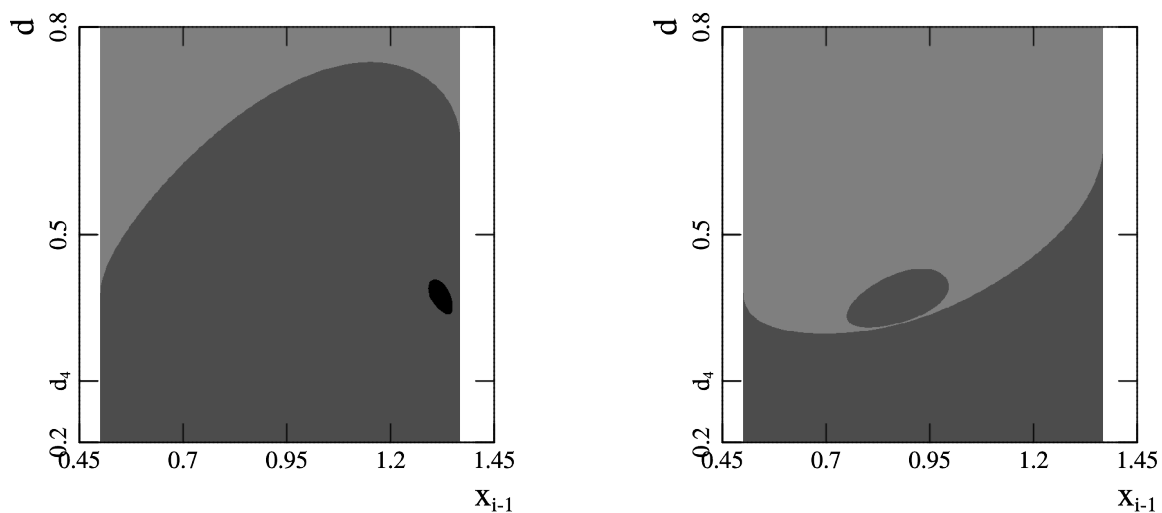


Рис. 18. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$\tau=4.6; \tau/T \approx 0.667$

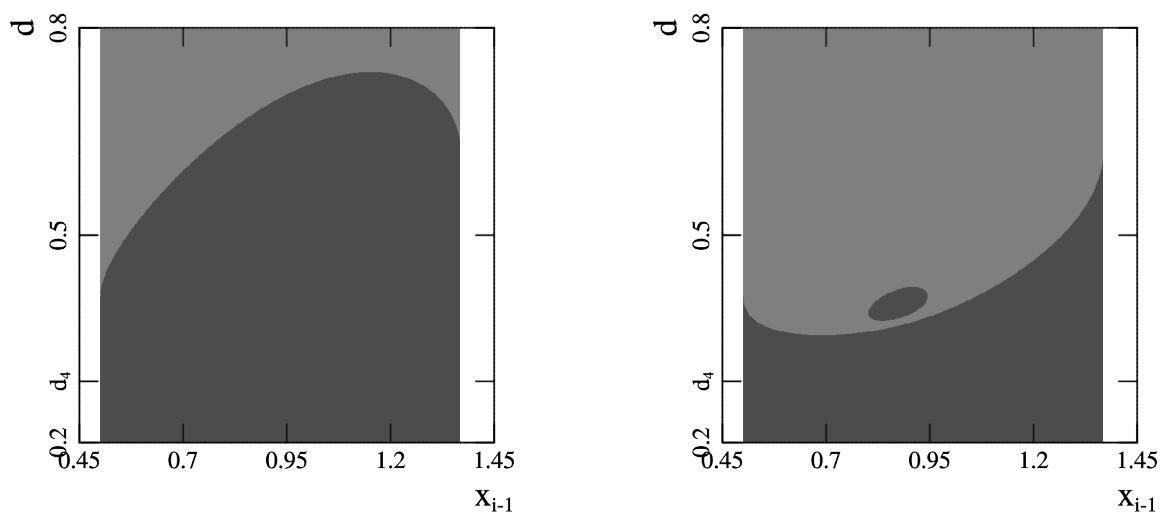


Рис. 19. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

$$\tau=4.7; \tau/T \approx 0.681$$

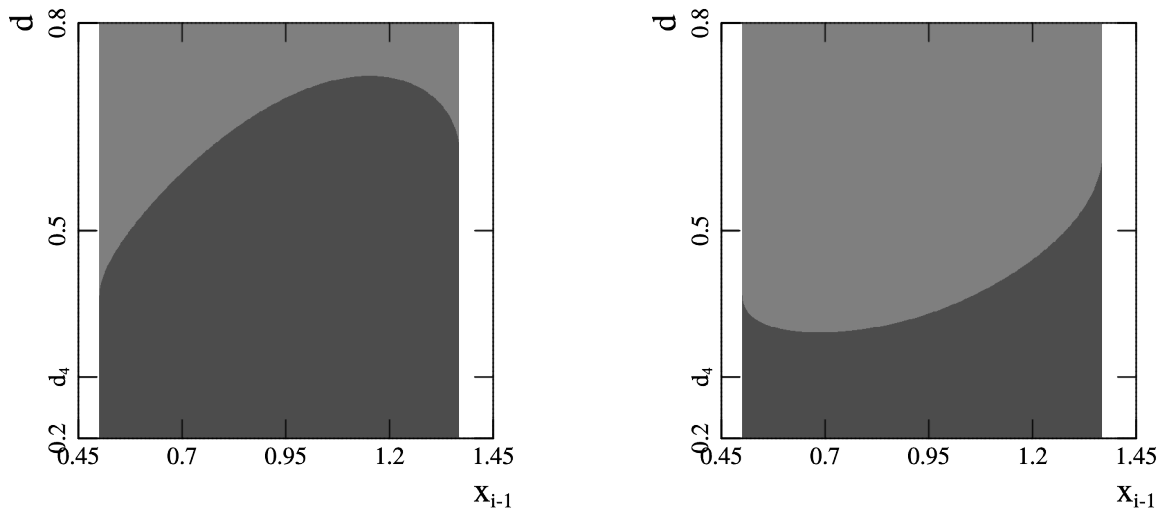


Рис. 20. Области определенного числа решений при $E = -1/12$.

Структура разбиения прямоугольника параметров x_{i-1} , d на области с различным числом решений зависит не только от шага вычислительного метода. Она также определяется интегральной кривой в фазовой плоскости. На рисунках 21 — 26 изображены графики областей определенного числа решений для $E = -1/600$. Эта интегральная кривая «глубже заходит» в окрестность особой точки типа седла фазовой плоскости $(0, 0)$. Период $T \approx 10.68$.

$$\tau=0.01; \tau/T \approx 0.000936$$

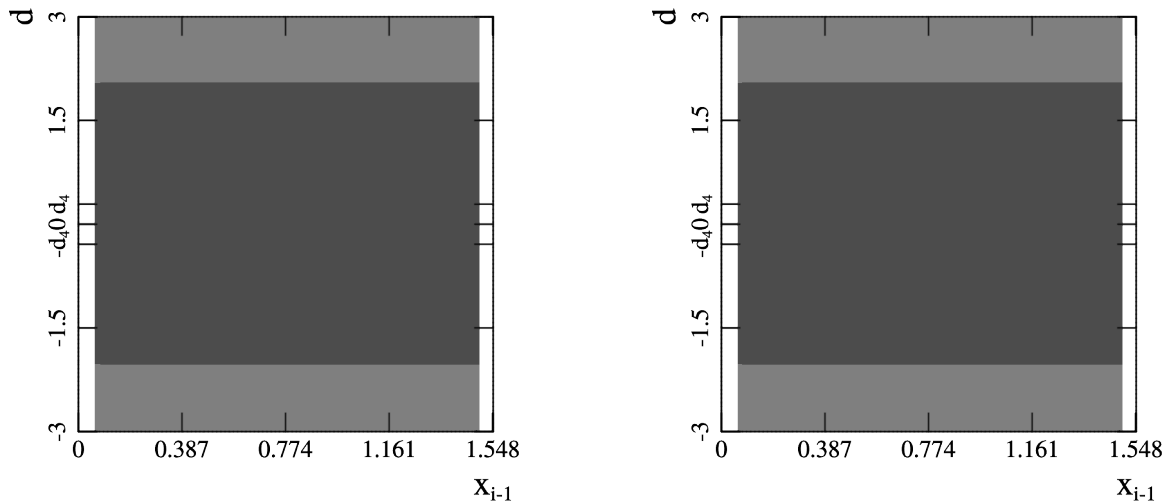


Рис. 21. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

$$\tau=0.2; \tau/T \approx 0.0187$$

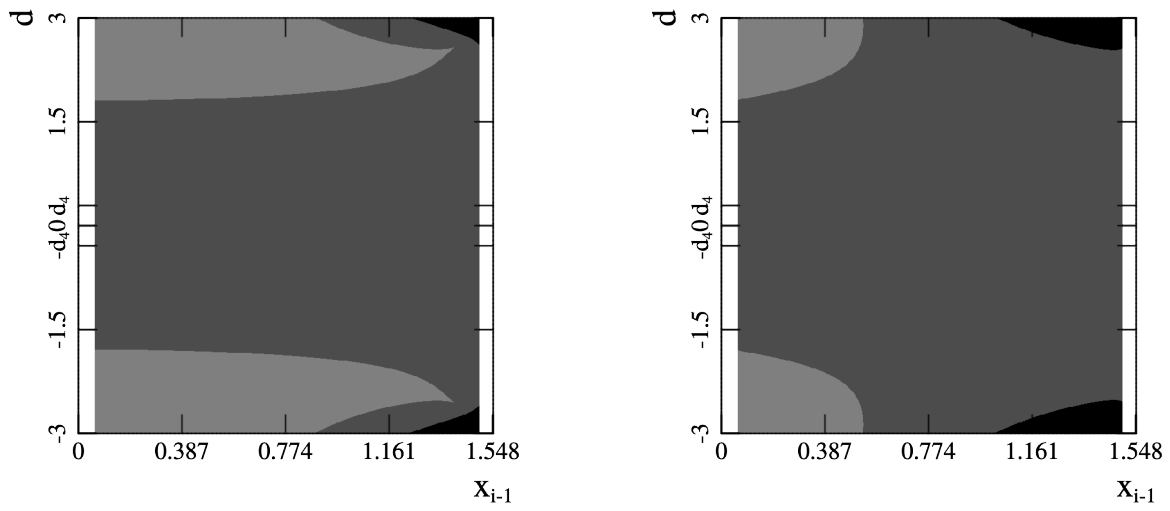


Рис. 22. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

$$\tau=1.5; \tau/T \approx 0.14$$

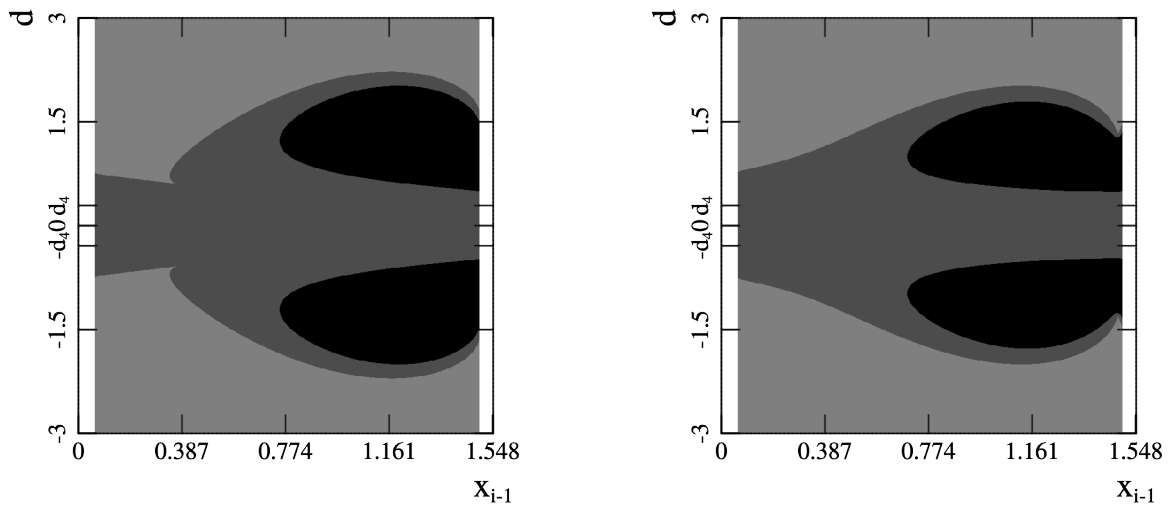


Рис. 23. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

$\tau=6; \tau/T \approx 0.562$

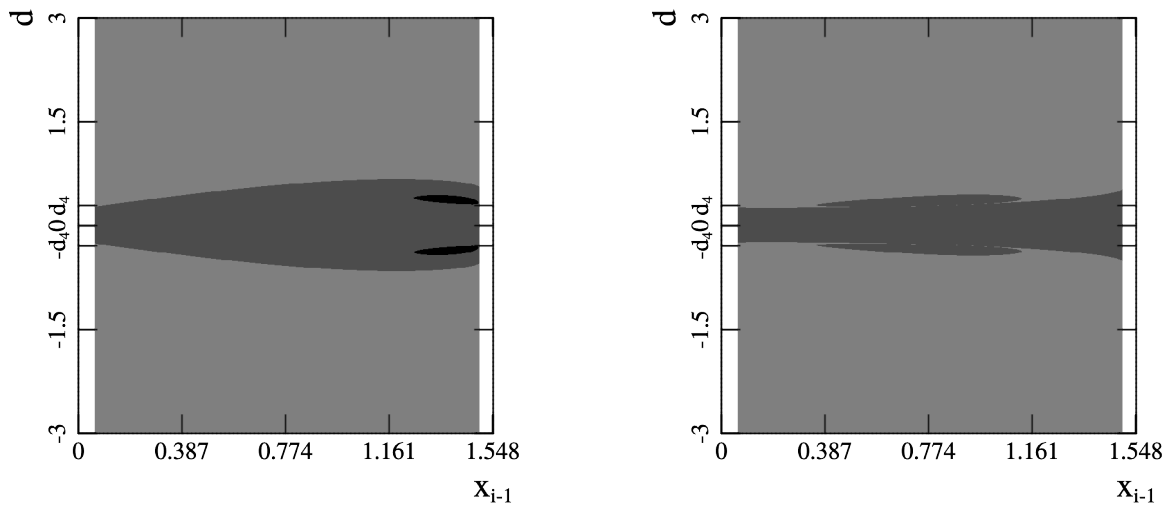


Рис. 24. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

$\tau=10.68; \tau/T \approx 1$

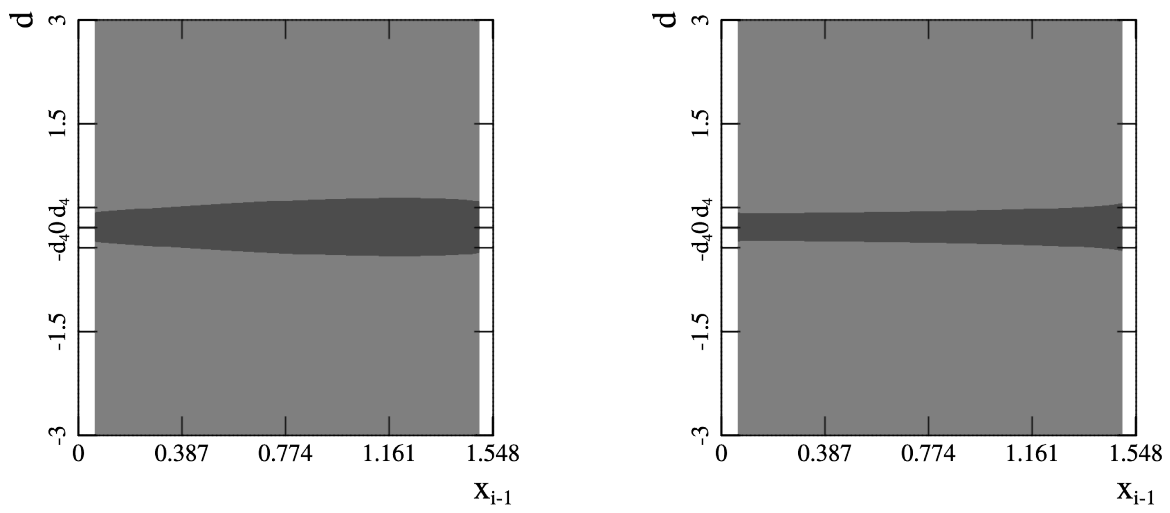


Рис. 25. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

$$\tau=21.36; \tau/T \approx 2$$

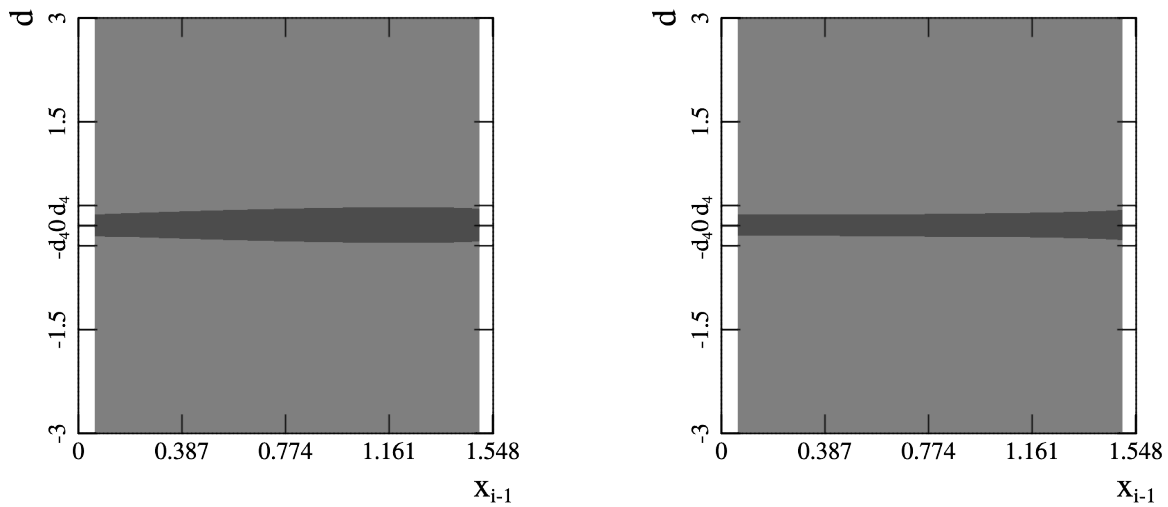


Рис. 26. Области определенного числа решений при $E = -1/600$.

На рисунках 27 — 34 изображены графики областей определенного числа решений для $E = -0.165$. В этом случае решения задачи Коши описывают почти гармонические колебания материальной точки в окрестности точки устойчивого равновесия $(0, 1)$ в фазовой плоскости. Период $T \approx 6.292$.

$$\tau=0.01; \tau/T \approx 0.00159$$

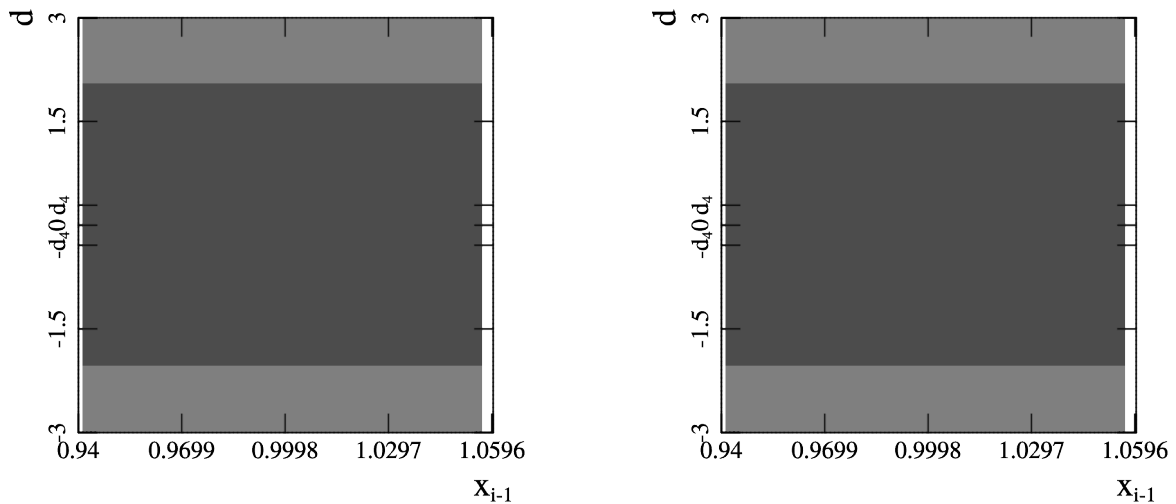


Рис. 27. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=0.2; \tau/T \approx 0.0318$

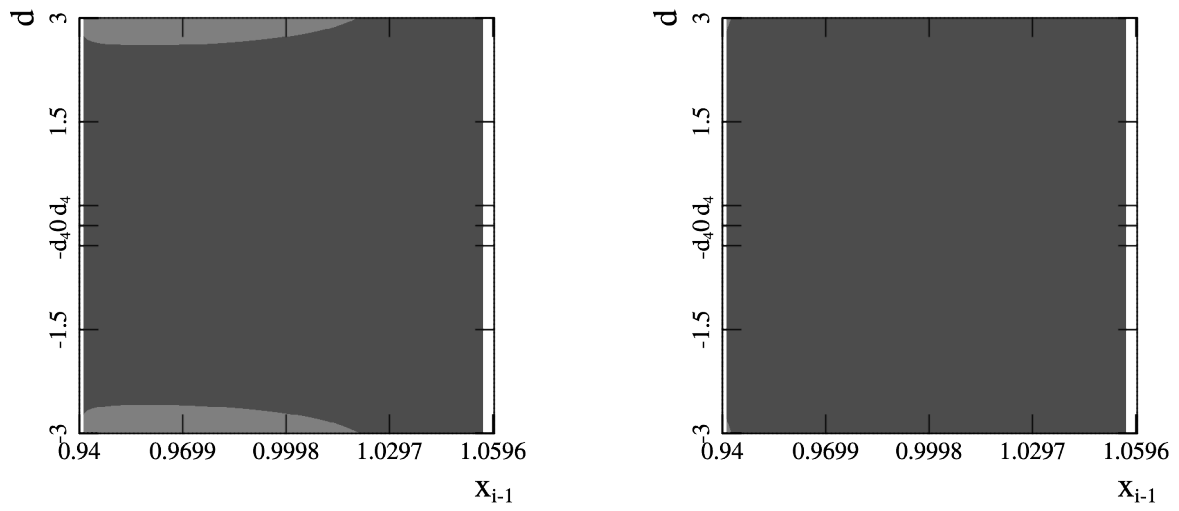


Рис. 28. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=0.3; \tau/T \approx 0.0477$

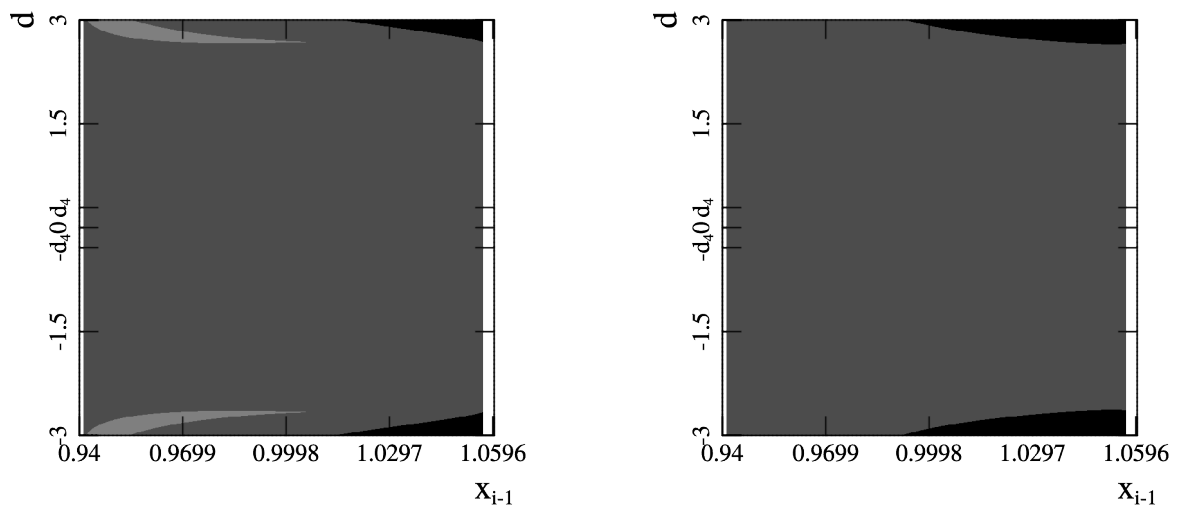


Рис. 29. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=0.5; \tau/T \approx 0.0795$

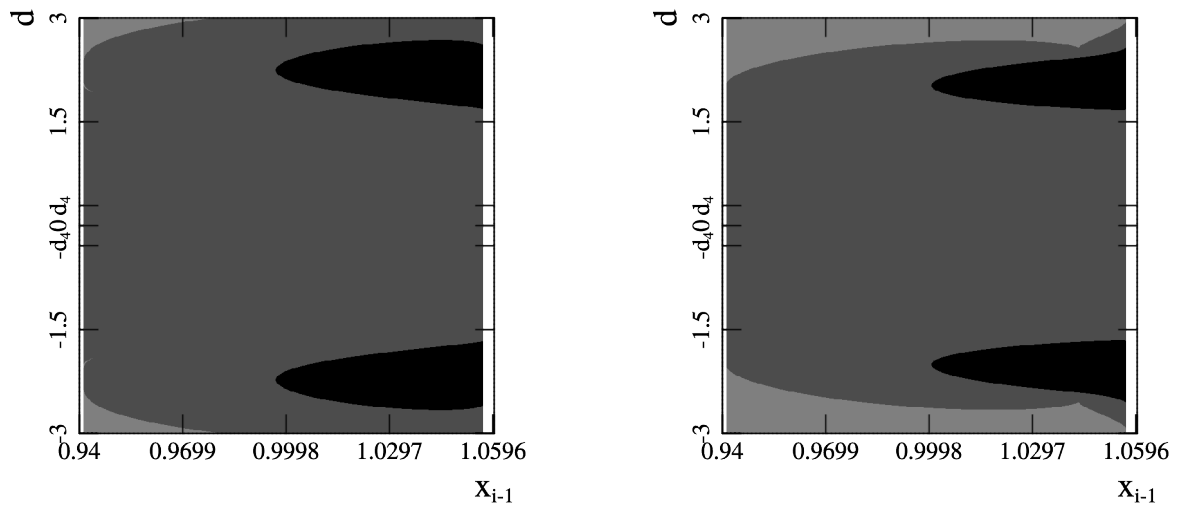


Рис. 30. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=1; \tau/T \approx 0.159$

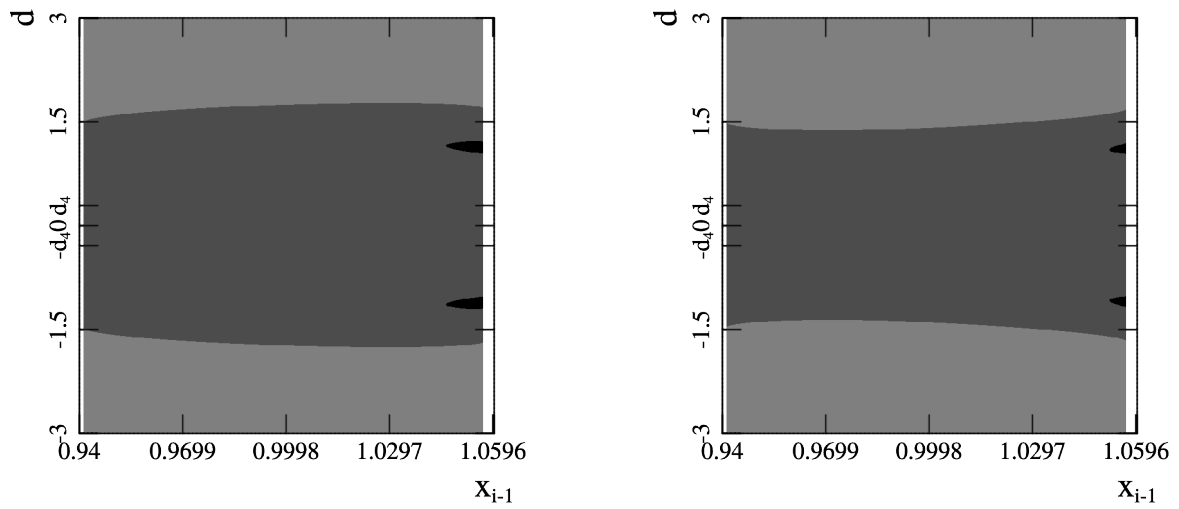


Рис. 31. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=1.5; \tau/T \approx 0.238$

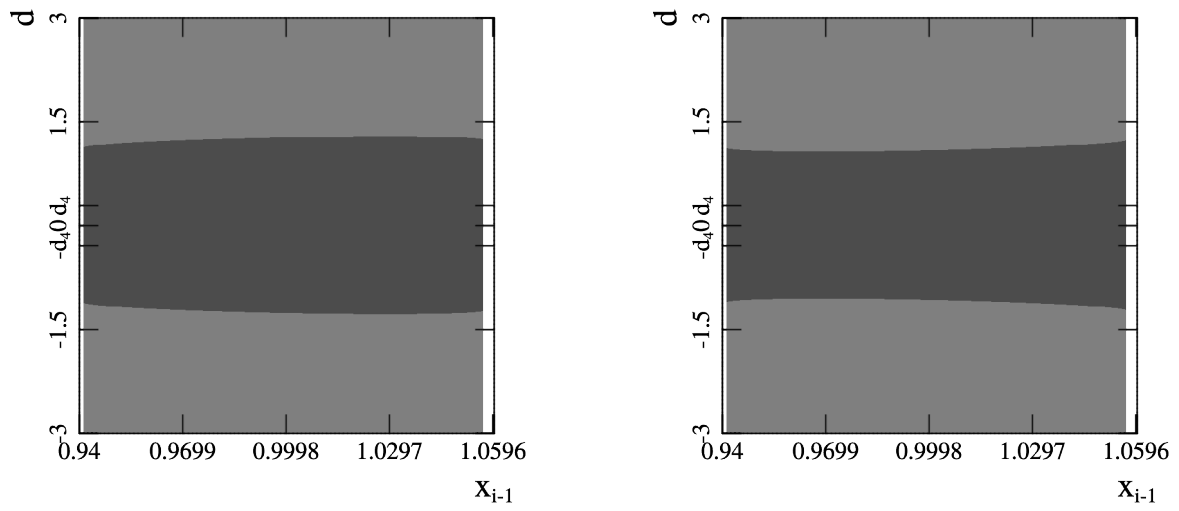


Рис. 32. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$\tau=6.292; \tau/T \approx 1$

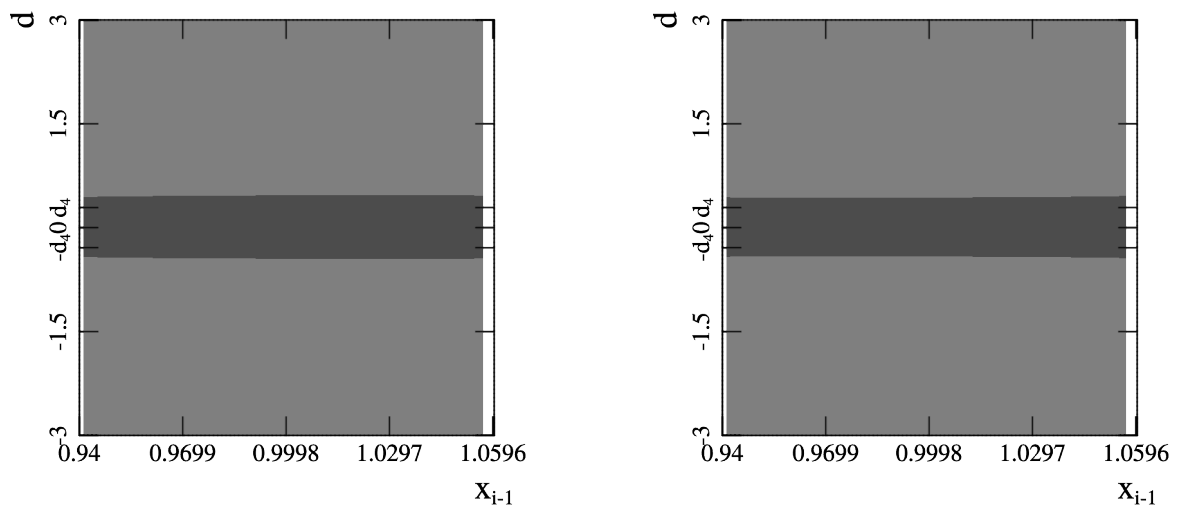


Рис. 33. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

$$\tau=12.584; \tau/T \approx 2$$

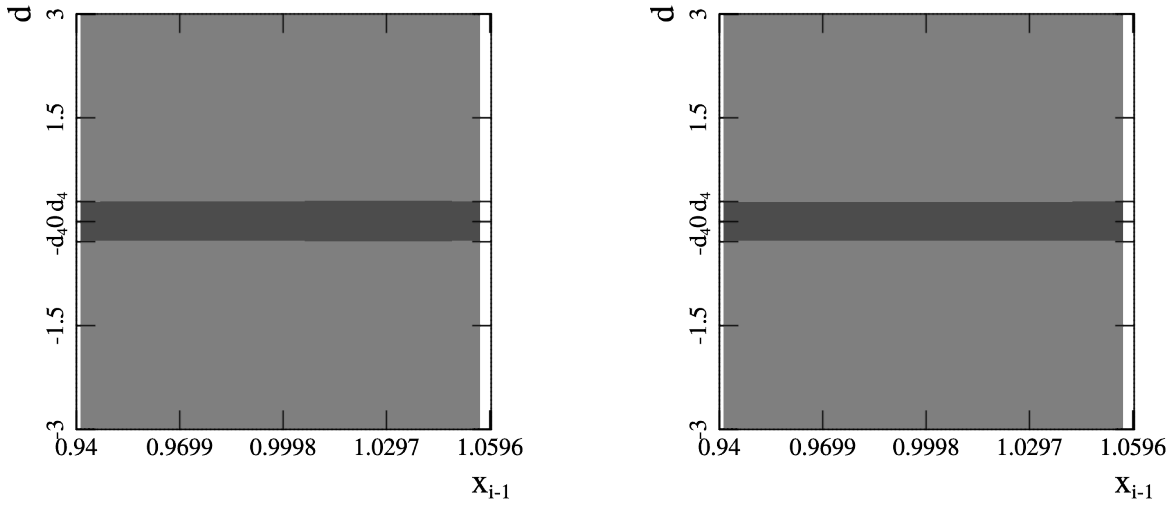


Рис. 34. Области определенного числа решений при $E = -0.165$.

Из анализа рисунков следует, что величина полной энергии финитного движения не оказывает критического влияния на структуру разбиения прямоугольника параметров на области с различным числом решений.

4. Анализ разрешающих уравнений

Алгебраическое уравнение четвертого порядка. Разрешающие уравнения (4) при $\tau \neq 0$, $d \neq 0$, ± 0.25 могут быть сведены к алгебраическому уравнению четвертой степени. Для этого k_{11} , k_{21} выражаются через k_{12} , k_{22} из второго и четвертого уравнений (4)

$$\begin{aligned} k_{11} &= d^{-1} \tau^{-1} v_{i-1} + d^{-2} \tau^{-1} (0.25 k_{12} - (0.25 + d) k_{22}), \\ k_{21} &= -d^{-1} \tau^{-1} v_{i-1} + d^{-2} \tau^{-1} ((d - 0.25) k_{12} + 0.25 k_{22}). \end{aligned} \quad (24)$$

Вводятся новые неизвестные s_{12} и s_{22} взамен k_{12} и k_{22}

$$\begin{aligned} s_{12} &= x_{i-1} + \tau (0.25 k_{12} + (0.25 + d) k_{22}), \\ s_{22} &= x_{i-1} + \tau ((0.25 - d) k_{12} + 0.25 k_{22}). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= g(s_{12}) = -s_{12}^2 + s_{12}, \\ k_{21} &= g(s_{22}) = -s_{22}^2 + s_{22}. \end{aligned} \quad (26)$$

k_{12} и k_{22} выражаются через s_{12} и s_{22} путем решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 0.25k_{12}+(0.25+d)k_{22} &= \frac{s_{12}-x_{i-1}}{\tau}, \\ (0.25-d)k_{12}+0.25k_{22} &= \frac{s_{22}-x_{i-1}}{\tau}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= (\tau d)^{-1}(s_{12}-s_{22}) - (\tau d)^{-1}(s_{12}-x_{i-1}-0.25d^{-1}(s_{12}-s_{22})) = \\ &= (\tau d)^{-1}(-s_{22}+x_{i-1}+0.25d^{-1}(s_{12}-s_{22})). \end{aligned} \quad (28)$$

$$k_{22} = \tau^{-1}d^{-1}(s_{12}-x_{i-1}-0.25d^{-1}s_{12}+0.25d^{-1}s_{22}). \quad (29)$$

Уравнения семейства методов в новых переменных s_{12} и s_{22} принимают вид:

$$\begin{cases} \tau^2 d^4 s_{12}^2 - (\tau^2 d^4 + d^2 - 0.125) s_{12} - (0.5d + 0.125) s_{22} + (d + 0.5) d x_{i-1} + \tau d^3 v_{i-1} = 0, \\ \tau^2 d^4 s_{22}^2 + (0.5d - 0.125) s_{12} - (\tau^2 d^4 + d^2 - 0.125) s_{22} + (d - 0.5) d x_{i-1} - \tau d^3 v_{i-1} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из первого уравнения следует, что

$$s_{22} = (\tau^2 d^4 s_{12}^2 - (d^2 - 0.125 + \tau^2 d^4) s_{12} + (d + 0.5) d x_{i-1} + \tau d^3 v_{i-1}) (0.5d + 0.125)^{-1}, \quad (31)$$

при $d \neq -0.25$.

Подстановка (31) во второе уравнение (30) дает алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\begin{aligned} & \tau^6 d^8 s_{12}^4 - 2\tau^4 d^4 \left(d^2 - \frac{1}{8} + \tau^2 d^4 \right) s_{12}^3 + \\ & + \tau^2 \left[\left(-\frac{1}{8} + d^2 \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} d + d^2 \right) + \tau^2 d^4 \left(-\frac{3}{8} - \frac{1}{2} d + 2d^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \tau^2 d^5 \left((1+2d) x_{i-1} + 2\tau d^2 v_{i-1} \right) + \tau^4 d^8 \right] s_{12}^2 + \\ & + \left[-\tau^2 d \left((1+2d) x_{i-1} + 2\tau d^2 v_{i-1} \right) \left(-\frac{1}{8} + d^2 + \tau^2 d^4 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} d \right) \left(1 - \frac{1}{4} \tau^2 + 2\tau^2 d^2 + \tau^4 d^4 \right) \right] s_{12} + \\ & + \frac{1}{4} \tau^2 d^2 \left((1+2d) x_{i-1} + 2\tau d^2 v_{i-1} \right)^2 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} d \right) \left(1 + \frac{1}{2} \tau^2 d (1+2d) \right) x_{i-1} - \\ & - \tau v_{i-1} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} d \right) \left(\frac{1}{2} + d(1 + \tau^2 d^2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

которое будем исследовать в дальнейшем.

Зная s_{12} , s_{22} , можно найти приближенное решение исходной задачи на следующем шаге

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i-1} + d^{-2} \tau^{-1} x_{i-1} + 0.25 d^{-3} \tau^{-1} (s_{12} - s_{22}) - 0.5 d^{-2} \tau^{-1} (s_{12} + s_{22}), \\ x_i &= x_{i-1} + 0.5 d^{-1} (s_{12} - s_{22}). \end{aligned}$$

Число корней алгебраического уравнения четвертой степени. Уравнение (32)

удобно привести к форме

$$y^4 + \alpha y^2 + \gamma y + \beta = 0, \quad (33)$$

в которой коэффициенты являются многочленами параметров¹

$$\begin{aligned} \alpha &= -2^{-7} \tau^{-4} d^{-8} \alpha_2, \\ \beta &= \tau^{-8} d^{-16} \beta_1, \\ \gamma &= 2^{-9} \tau^{-6} d^{-12} (4d-1)(4d+1)^2. \end{aligned}$$

Применяя метод Штурма и результаты [2] получим для числа простых корней многочлена четвертой степени N формулу

$$N = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha > 0, A > 0, r > 0; \alpha > 0, A < 0, r > 0; \alpha < 0, A > 0, r > 0 \\ 2, & \text{при } \alpha > 0, A > 0, r < 0; \alpha < 0, A > 0, r < 0; \alpha < 0, A < 0, r < 0 \\ 4, & \text{при } \alpha < 0, A < 0, r > 0 \end{cases}$$

При $r < 0$ уравнение имеет два простых действительных корня, при $r > 0$ — либо четыре простых корня, либо ни одного. Уравнение $r = 0$ определяет поверхность кратных корней в пространстве коэффициентов $((\alpha, \beta, \gamma): -\infty < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty, -\infty < \gamma < +\infty)$ уравнения (33) и при выполнении соответствующих дополнительных неравенств определяет границы между областями с различным числом действительных решений. Рассмотрим более детально структуру поверхности кратных корней.

Поверхность кратных корней. Выделим в плоскости $\{\alpha, \beta\} = (-\infty < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty, \gamma = 0)$ четыре области $D_0, D_{1,1}, D_{1,2}, D_2$:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(\alpha, \beta): \beta < 0, -\sqrt{-12\beta} < \alpha\}, \\ D_{1,1} &= \{(\alpha, \beta): 0 \leq \beta, -\sqrt{4\beta} < \alpha\}, \quad D_{1,2} = \{(\alpha, \beta): 0 < \beta, \alpha < -\sqrt{4\beta}\}, \\ D_2 &= \{(\alpha, \beta): \beta \leq 0, \alpha < -\sqrt{-12\beta}\}, \end{aligned}$$

множество

$$\underline{D}_2 = \{(\alpha, \beta): \alpha \leq 0, -\frac{1}{12} \alpha^2 \leq \beta \leq 0\},$$

линию l_1

$$l_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma): 0 < \beta, \alpha = -\sqrt{4\beta}, \gamma = 0\},$$

а также линии $l_{2,\pm}$

$$l_{2,\pm} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma): \beta < 0, \alpha = -\sqrt{-12\beta}, \gamma = \pm \left(\frac{2}{3} |\alpha| \right)^{1.5} \right\}.$$

Для $(\alpha, \beta) \in D_0$ не существует поверхности кратных корней.

¹ Зависимости $\alpha_2, \beta_1, A_2, r_2$ от параметров метода τ, d и параметров решения x_{i-1}, v_{i-1} представлены в приложении.

Для $(\alpha, \beta) \in D_{1,1} \cup D_{1,2} \cup \underline{D}_2$ поверхность кратных корней состоит из двух листов

$$S_{1,+}: \gamma = \gamma_1(\alpha, \beta) = -\sqrt{2} \cdot 3^{-1.5} \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 12\beta}} (2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 12\beta}), \quad (34.1)$$

$$S_{1,-}: \gamma = -\gamma_1(\alpha, \beta). \quad (34.2)$$

Листы $S_{1,-}$, $S_{1,+}$ пересекаются по линии l_1 .

Для $(\alpha, \beta) \in \underline{D}_2$ поверхность кратных корней содержит еще два листа $S_{2,-}$, $S_{2,+}$

$$S_{2,+}: \gamma = \gamma_2(\alpha, \beta) = -\sqrt{2} \cdot 3^{-1.5} \sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 12\beta}} (-2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 12\beta}), \quad (35.1)$$

$$S_{2,-}: \gamma = -\gamma_2(\alpha, \beta). \quad (35.2)$$

Листы $S_{1,-}$ и $S_{2,+}$ ($S_{1,+}$ и $S_{2,-}$) имеют общую линию $l_{2,-}$ ($l_{2,+}$). Листы поверхности кратных корней образуют «ласточкин» хвост [3] и изображены на рис. 35.

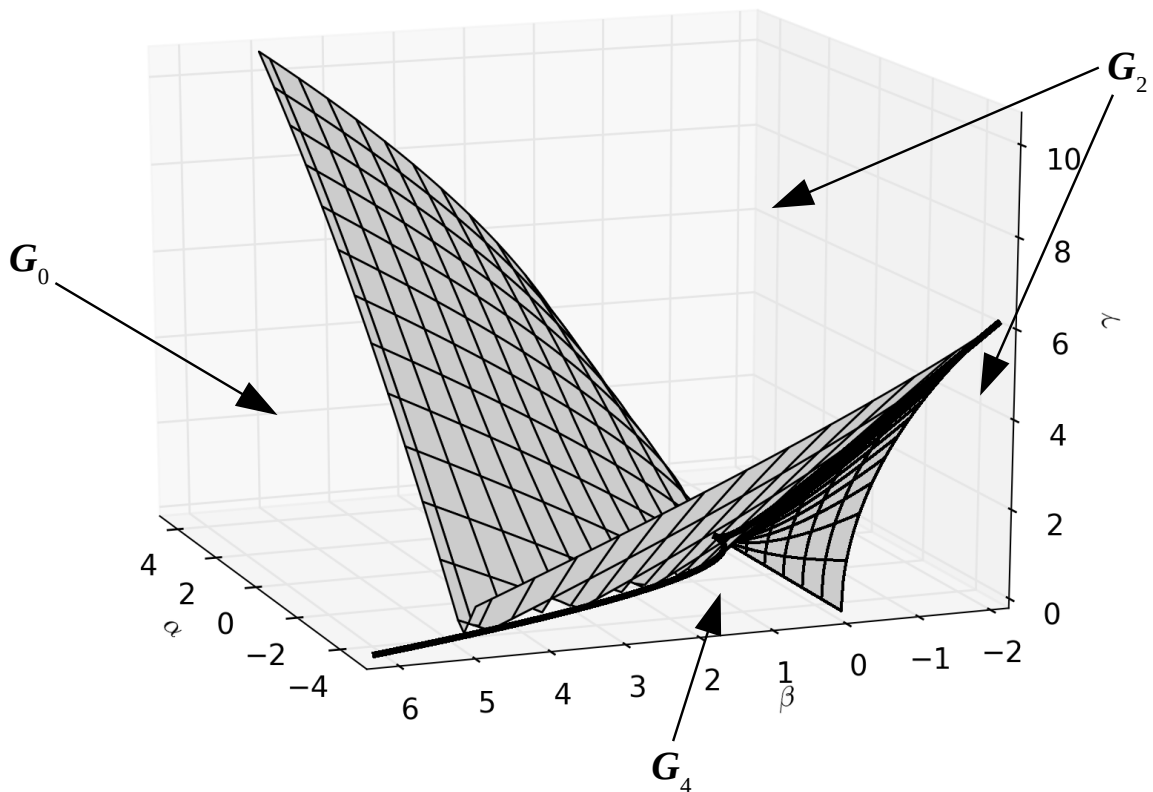


Рис. 35. Часть поверхности кратных корней «ласточкин хвост» в положительном полупространстве $\gamma > 0$. Для полной картины следует зеркально отразить изображенные листы поверхности в плоскости $\{\alpha, \beta\}$. В области G_0 отсутствуют действительные решения. В области G_2 (G_4) существует два (четыре) простых решения.

Для (α, β) из $D_{1,1}$ точкам на листе $S_{1,+}$ ($S_{1,-}$) соответствует единственный двукратный действительный корень уравнения (33)

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} \quad \left(y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} \right).$$

Для (α, β) из $D_{1,2} \cup D_2$ точкам на листе $S_{1,+}$ ($S_{1,-}$) соответствует единственный двукратный действительный корень

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} \quad \left(y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} \right)$$

и два однократных корня

$$y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha}$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha} \right),$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha}$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha} \right).$$

Для (α, β) из D_2 точкам на листе $S_{2,+}$ ($S_{2,-}$) соответствует единственный двукратный действительный корень $y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha}$ $\left(y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} \right)$ и два простых корня

$$y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha}$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha} \right),$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha}$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - \alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + 12\beta} - 2\alpha} \right).$$

На линии l_1 уравнение (33) имеет два различных двукратных корня $y = -\sqrt{-\frac{1}{2}\alpha}$, $y = \sqrt{-\frac{1}{2}\alpha}$.

На линии l_2 уравнение (33) имеет один трехкратный корень $y = \pm \sqrt{-\frac{1}{6}\alpha}$ и один простой

корень $y = \mp \sqrt{-\frac{3}{2}\alpha}$. В точке $(0, 0, 0)$ уравнение (33) имеет один четырехкратный корень $y = 0$.

Для (α, β) из $D_{1,1}$ листы $S_{1,-}$ и $S_{1,+}$ являются границами между областью отсутствия действительных решений G_0

$$\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < -\gamma_1(\alpha, \beta)$$

и областью существования двух простых решений G_2

$$\gamma < \gamma_1(\alpha, \beta), \quad -\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma.$$

Для (α, β) из $D_{1,2}$ листы $S_{1,-}$ и $S_{1,+}$ служат границами $B_{2,4}$ между областью G_2

$$\gamma < -\gamma_1(\alpha, \beta), \quad \gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma$$

и областью существования четырех простых решений G_4

$$-\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_1(\alpha, \beta).$$

Для (α, β) из D_2 листы $S_{2,-}$ и $S_{2,+}$, а также листы $S_{1,-}$ и $S_{1,+}$ являются границами $B_{2,4}$ между областями G_2

$$\gamma < -\gamma_1(\alpha, \beta), \quad \gamma_2(\alpha, \beta) < \gamma < -\gamma_2(\alpha, \beta), \quad \gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma$$

и G_4

$$-\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_2(\alpha, \beta), \quad -\gamma_2(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_1(\alpha, \beta).$$

Следовательно, система разрешающих уравнений не имеет действительных решений при выполнении неравенств

$$0 < \beta, \tag{36.1}$$

$$-\sqrt{4\beta} < \alpha, \tag{36.2}$$

$$\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < -\gamma_1(\alpha, \beta). \tag{36.3}$$

Неравенства (36) определяют область несуществования решений разрешающих уравнений G_0 . Область существования четырех простых решений системы разрешающих уравнений G_4 определяется либо неравенствами

$$0 < \beta, \tag{37.1}$$

$$\alpha < -\sqrt{4\beta}, \tag{37.2}$$

$$-\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_1(\alpha, \beta), \tag{37.3}$$

либо неравенствами

$$\beta < 0, \tag{38.1}$$

$$\alpha < -\sqrt{-12\beta}, \tag{38.2}$$

$$-\gamma_1(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_2(\alpha, \beta), \tag{38.3}$$

$$\gamma_2(\alpha, \beta) < \gamma < -\gamma_1(\alpha, \beta). \quad (38.4)$$

Проекция этих условий на плоскость $\{x_{i-1}, d\}$ при фиксированном значении параметра τ дает перечисленные выше основные результаты.

Уравнение поверхности кратных корней можно записать в виде

$$(\gamma - \gamma_1(\alpha, \beta))(\gamma + \gamma_1(\alpha, \beta))(\gamma - \gamma_2(\alpha, \beta))(\gamma + \gamma_2(\alpha, \beta)) = 0$$

или

$$r(\alpha, \beta, \gamma) = -27 \left(\gamma^4 + \frac{4}{27} \alpha (\alpha^2 - 36\beta) \gamma^2 - \frac{16}{27} \beta (\alpha^2 - 4\beta)^2 \right) = 0. \quad (39)$$

Диагонально неявный метод. При $d = -0.25$ метод является диагонально неявным и действительные s_{12}, s_{22} могут быть найдены из двух квадратных уравнений

$$\tau^2 s_{12}^2 - (\tau^2 - 16) s_{12} - 16 x_{i-1} - 4 \tau v_{i-1} = 0, \quad (40.1)$$

$$\tau^2 s_{22}^2 - (\tau^2 - 16) s_{22} - 64 s_{12} + 48 x_{i-1} + 4 \tau v_{i-1} = 0, \quad (40.2)$$

с помощью следующих формул

$$s_{12,1} = 0.5 - \frac{8(\sqrt{d_3} + 1)}{\tau^2}, \quad (41.1)$$

$$s_{12,2} = \frac{x_{i-1} + 0.25 \tau v_{i-1}}{0.5(1 + \sqrt{d_3}) - \frac{1}{32} \tau^2}, \quad (41.2)$$

при выполнении неравенства

$$d_3 = 1 + \frac{1}{16} (4 x_{i-1} + \tau v_{i-1} - 2) \tau^2 + \frac{1}{256} \tau^4 \geq 0, \quad (41.3)$$

и

$$s_{22,1} = 0.5 - \frac{8(\sqrt{d_4} + 1)}{\tau^2}, \quad (42.1)$$

$$s_{22,2} = -\frac{3 x_{i-1} - 4 s_{12} + 0.25 \tau v_{i-1}}{0.5(1 + \sqrt{d_4}) - \frac{1}{32} \tau^2}, \quad (42.2)$$

при выполнении неравенства

$$d_4 = 1 - \frac{1}{4} (3 x_{i-1} + 0.25 \tau v_{i-1} - 4 s_{12} + 0.5) \tau^2 + \frac{1}{256} \tau^4 \geq 0. \quad (42.3)$$

После подстановки $s_{12,1}, s_{12,2}$ в d_4 имеем

$$d_{4,1} = d_4(s_{12,1}) = -7 - 8\sqrt{d_3} - \frac{1}{4}(3x_{i-1} + 0.25\tau v_{i-1} - 1.5)\tau^2 + \frac{1}{256}\tau^4,$$

$$d_{4,2} = d_4(s_{12,2}) = -7 + 8\sqrt{d_3} - \frac{1}{4}(3x_{i-1} + 0.25\tau v_{i-1} - 1.5)\tau^2 + \frac{1}{256}\tau^4.$$

Заметим, что $d_{4,2} = d_{4,1} + 16\sqrt{d_3}$, поэтому, если $0 < d_{4,1}$, то $0 < d_{4,2}$.

Число действительных решений зависит от знаков величин d_3 , $d_{4,1}$, $d_{4,2}$. Возможны следующие ситуации.

1. Если $d_3 < 0$, то решения (s_{12}, s_{22}) не существуют.
2. Если $d_3 > 0$, $d_{4,1} < 0$ и $d_{4,2} > 0$, то существуют два простых решения $(s_{12,2}, s_{22,1}(s_{12,2}))$ и $(s_{12,2}, s_{22,2}(s_{12,2}))$.
3. Если $d_3 > 0$, $d_{4,1} > 0$ и $d_{4,2} > 0$, то существуют четыре простых решения $(s_{12,1}, s_{22,1}(s_{12,1}))$, $(s_{12,1}, s_{22,2}(s_{12,1}))$, $(s_{12,2}, s_{22,1}(s_{12,2}))$, $(s_{12,2}, s_{22,2}(s_{12,2}))$.
4. При $d_3 = d_{4,1} = d_{4,2} = 0$ имеется одно четырехкратное решение $(s_{12,1}, s_{22,1}(s_{12,1}))$.
5. При $d_3 = 0$, $d_{4,1} = d_{4,2} > 0$ имеется два двукратных решения $(s_{12,1}, s_{22,1}(s_{12,1}))$, $(s_{12,1}, s_{22,2}(s_{12,1}))$.

Рассмотрим два последних случая более детально.

Четырехкратное решение. Если $d_3 = d_{4,1} = d_{4,2} = 0$, то $x_{i-1} = -\frac{12}{\tau^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{64}\tau^2$,

$v_{i-1} = \frac{32}{\tau^3} - \frac{1}{8}\tau$ и полная энергия $E(\tau)$ удовлетворяет неравенству $-\frac{1}{6} < E < 0$ при $\tau \in (\tau_1, 4)$ в

силу монотонно возрастающей зависимости $E = E(\tau)$ при положительных τ .

$$\tau_1 = \frac{2^{11/6} \sqrt{2^{1/3}(\sqrt{3}-1)^{1/3} - 1} \sqrt{2^{1/3}(\sqrt{3}-1)^{1/3} + 2}}{(\sqrt{3}-1)^{1/6}} \approx 2.446821.$$

Зависимость $x_{i-1} = -\frac{12}{\tau^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{64}\tau^2$ также является монотонно возрастающей для положительных τ , поэтому при $\tau \in (\tau_1, 4)$ величина x_{i-1} принадлежит интервалу $(x_{i-1,1}, 0)$, где $x_{i-1,1} \approx -1.410820$. Следовательно, четырехкратное решение не существует при финитных движениях и возможно при инфинитных движениях материальной точки. На рис. 36 изображен такой случай ($E = -1/12$; $\tau \approx 2.648$) в плоскости x_{i-1}, d . Точки четырехкратного решения помечены крестами.

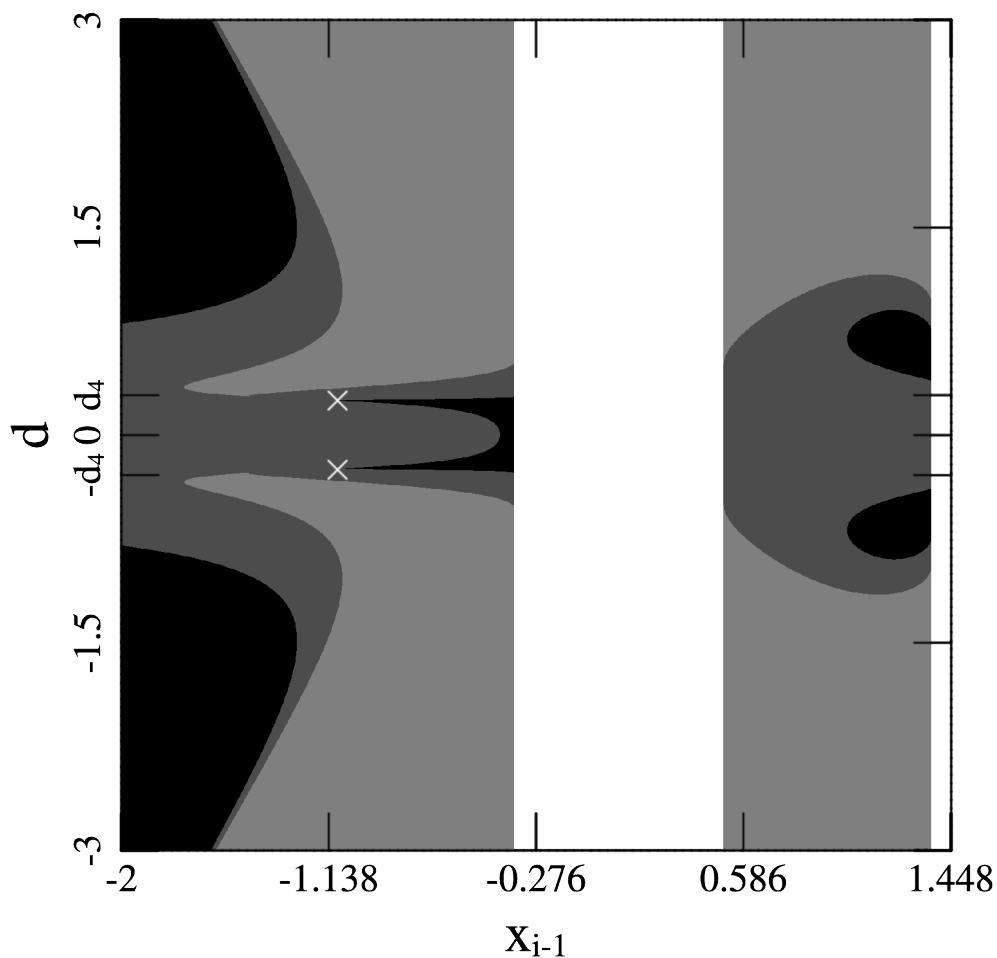


Рис. 36. Точки, где имеется четырехкратный корень, существуют при инфинитном движении.

Два двукратных корня. Если $d_3 = 0$ и $d_{4,1} = d_{4,2} > 0$, то либо

$$x_{i-1} = -\frac{4}{\tau^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} v_{i-1} \tau - \frac{1}{64} \tau^2, \quad v_{i-1} > \frac{32}{\tau^3} - \frac{1}{8} \tau,$$

либо

$$v_{i-1} = -\frac{16 - 2\tau^2(1 - 2x_{i-1})}{\tau^3} - \frac{1}{16} \tau, \quad x_{i-1} < -\frac{12}{\tau^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{64} \tau^2.$$

Можно показать, что эти условия не выполняются для финитного движения. Однако, они могут выполняться для инфинитного движения. Такой случай ($E = -1/12$; $\tau = 3$) представлен

на рис. 37. Точки, в которых существуют два различных двукратных решения отмечены крестами.

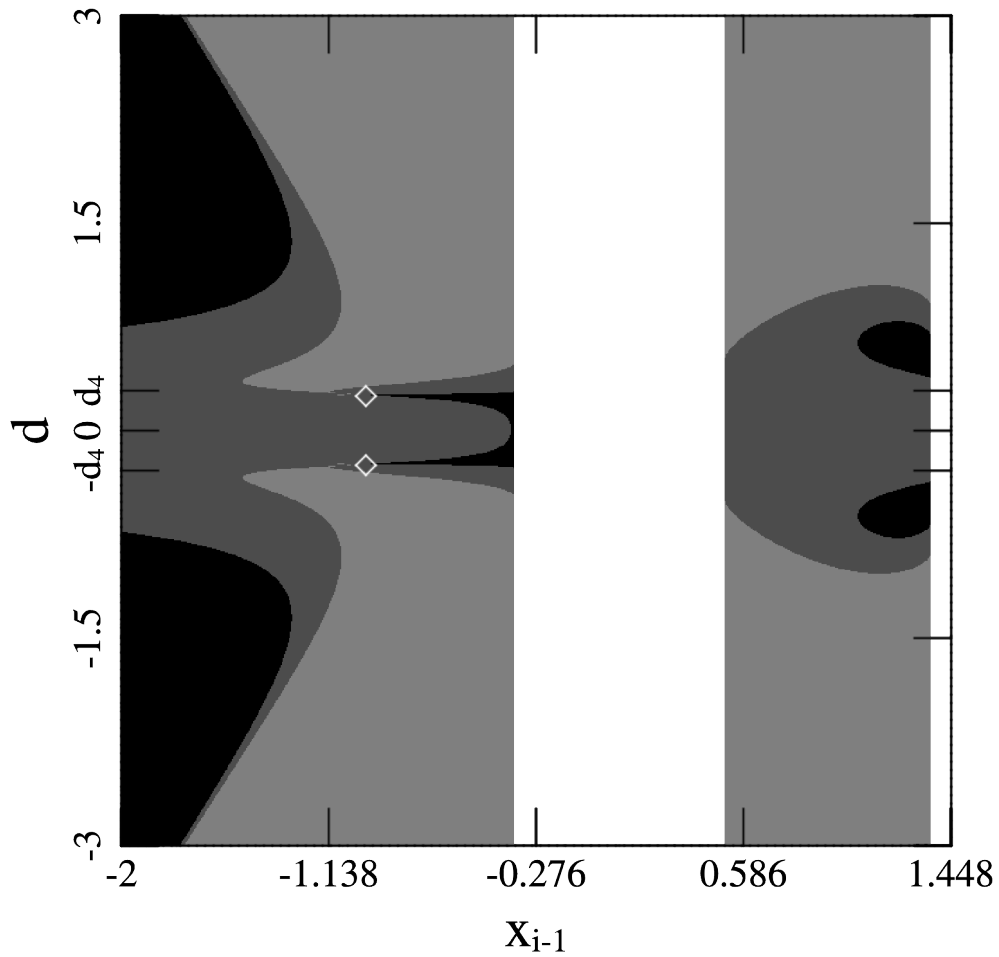


Рис. 37. Точки, где имеются два двукратных корня, существуют при инфинитном движении.

Лишь $s_{12,2}$ и $s_{22,2}$ представляют интерес для построения приближенного решения, аппроксимирующего точное решение задачи Коши

$$s_{12,2} = \frac{x_{i-1} + 0.25 \tau v_{i-1}}{0.5(1 + \sqrt{d_3}) - \frac{1}{32} \tau^2},$$

$$\begin{aligned}
s_{22,2} &= -\frac{3x_{i-1}-4s_{12,2}+0.25\tau v_{i-1}}{0.5(1+\sqrt{d_4(s_{12,2})})-\frac{1}{32}\tau^2} = \\
&= -\frac{3x_{i-1}-\frac{4x_{i-1}+\tau v_{i-1}}{0.5(1+\sqrt{d_3})-\frac{1}{32}\tau^2}+0.25\tau v_{i-1}}{0.5\left(1+\sqrt{-7+8\sqrt{d_3}-\frac{1}{4}(3x_{i-1}+0.25\tau v_{i-1}-1.5)\tau^2+\frac{1}{256}\tau^4}\right)-\frac{1}{32}\tau^2}, \\
d_3 &= 1+\frac{1}{16}(4x_{i-1}+\tau v_{i-1}-2)\tau^2+\frac{1}{256}\tau^4 \geq 0.
\end{aligned}$$

5. Приложение

Приведем явные выражения для ряда функций от параметров задачи τ , d , x_{i-1} , v_{i-1} , нужных для определения границ областей с различным числом решений системы разрешающих уравнений. Эти функции являются многочленами.

$$\alpha_2 = 64d^8\tau^4 - 256v_{i-1}d^7\tau^3 - 128(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 - 64(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 64d^4 + 64d^3 - 8d - 1,$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left[4096d^{16}\tau^8 - 32768v_{i-1}d^{15}\tau^7 + 16384(-2x_{i-1}+4v_{i-1}^2+1)d^{14}\tau^6 - 8192(2x_{i-1}-1)d^{13}\tau^6 + \right. \\
&+ 65536v_{i-1}(2x_{i-1}-1)d^{13}\tau^5 + 32768v_{i-1}(2x_{i-1}-1)d^{12}\tau^5 + 8192(8x_{i-1}^2-8x_{i-1}+3)d^{12}\tau^4 + \\
&+ 8192(8x_{i-1}^2-8x_{i-1}+3)d^{11}\tau^4 - 32768v_{i-1}d^{11}\tau^3 + 16384(x_{i-1}-1)x_{i-1}d^{10}\tau^4 - 32768v_{i-1}d^{10}\tau^3 - \\
&- 16384(2x_{i-1}-1)d^{10}\tau^2 - 3072d^9\tau^4 - 16384v_{i-1}d^9\tau^3 - 24576(2x_{i-1}-1)d^9\tau^2 - 384d^8\tau^4 - \\
&- 4096v_{i-1}d^8\tau^3 + 2^{12}d^8 - 512v_{i-1}d^7\tau^3 + 2048(2x_{i-1}-1)d^7\tau^2 + 2^{13}d^7 - 256(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 - \\
&\left. - 128(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 1024d^5 + 640d^4 - 384d^3 - 128d^2 + 16d + 5 \right] / 65536,
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -2^{-7}\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + 12\beta_1 &= \left[1024d^{16}\tau^8 - 8192v_{i-1}d^{15}\tau^7 + 4096(-2x_{i-1}+4v_{i-1}^2+1)d^{14}\tau^6 - 2048(2x_{i-1}-1)d^{13}\tau^6 + \right. \\
&+ 16384v_{i-1}(2x_{i-1}-1)d^{13}\tau^5 + 8192v_{i-1}(2x_{i-1}-1)d^{12}\tau^5 + 2048(8x_{i-1}^2-8x_{i-1}+3)d^{12}\tau^4 + \\
&+ 2048(8x_{i-1}^2-8x_{i-1}+3)d^{11}\tau^4 - 8192v_{i-1}d^{11}\tau^3 + 256(16x_{i-1}^2-16x_{i-1}+1)d^{10}\tau^4 - \\
&- 8192v_{i-1}d^{10}\tau^3 - 4096(2x_{i-1}-1)d^{10}\tau^2 - 640d^9\tau^4 - 3072v_{i-1}d^9\tau^3 - 6144(2x_{i-1}-1)d^9\tau^2 - \\
&- 80d^8\tau^4 - 512v_{i-1}d^8\tau^3 - 512(2x_{i-1}-1)d^8\tau^2 + 2^{10}d^8 - 64v_{i-1}d^7\tau^3 + 512(2x_{i-1}-1)d^7\tau^2 + 2^{11}d^7 + \\
&\left. + 32(2x_{i-1}-1)d^6\tau^2 + 2^8d^6 - 16(2x_{i-1}-1)d^5\tau^2 + 128d^5 + 48d^4 - 80d^3 - 20d^2 + 4d + 1 \right] / 1024,
\end{aligned}$$

$$A = -2^{-15}(4d+1)^2d^{-24}\tau^{-12}A_2,$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & 8192 x_{i-1}^2 d^{12} \tau^4 - 2048 x_{i-1}^2 d^{10} \tau^4 - 8192 v_{i-1} x_{i-1} d^{12} \tau^5 - 4096 x_{i-1} d^{14} \tau^6 - 8192 x_{i-1} d^{12} \tau^4 + \\
& + 2048 x_{i-1} d^{10} \tau^4 - 4096 x_{i-1} d^{10} \tau^2 + 2048 x_{i-1} d^8 \tau^2 - 192 x_{i-1} d^6 \tau^2 - 8192 v_{i-1}^2 d^{14} \tau^6 + \\
& + 4096 v_{i-1} d^{12} \tau^5 + 4096 v_{i-1} d^{10} \tau^3 - 512 v_{i-1} d^8 \tau^3 + 512 d^{16} \tau^8 + 2048 d^{14} \tau^6 + 3072 d^{12} \tau^4 - \\
& - 512 d^{10} \tau^4 - 16 d^8 \tau^4 + 2048 d^{10} \tau^2 - 1024 d^8 \tau^2 + 96 d^6 \tau^2 + 512 d^8 - 512 d^6 - 176 d^4 + 28 d^2 - 1,
\end{aligned}$$

$$r = 2^{-23} (4d+1)^4 d^{-40} \tau^{-24} r_2,$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & 4096 d^{24} \tau^{16} - 32768 (2 x_{i-1} + 4 v_{i-1}^2 - 1) d^{22} \tau^{14} - 65536 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^{20} \tau^{13} + \\
& + 16384 (24 x_{i-1}^2 + 64 v_{i-1}^2 x_{i-1} - 24 x_{i-1} + 64 v_{i-1}^4 - 32 v_{i-1}^2 + 7) d^{20} \tau^{12} - \\
& - 16384 (2 x_{i-1}^2 - 2 x_{i-1} + 1) d^{18} \tau^{12} + \\
& + 65536 v_{i-1} (16 x_{i-1}^2 + 32 v_{i-1}^2 x_{i-1} - 16 x_{i-1} - 16 v_{i-1}^2 + 5) d^{18} \tau^{11} - \\
& - 32768 (32 x_{i-1}^3 + 64 v_{i-1}^2 x_{i-1}^2 - 48 x_{i-1}^2 - 64 v_{i-1}^2 x_{i-1} + 30 x_{i-1} + 24 v_{i-1}^2 - 7) d^{18} \tau^{10} - \\
& - 768 d^{16} \tau^{12} - 57344 v_{i-1} d^{16} \tau^{11} + \\
& + 32768 (8 x_{i-1}^3 + 48 v_{i-1}^2 x_{i-1}^2 - 12 x_{i-1}^2 - 48 v_{i-1}^2 x_{i-1} + 10 x_{i-1} - 3) d^{16} \tau^{10} - \\
& - 131072 v_{i-1} (16 x_{i-1}^3 - 24 x_{i-1}^2 + 18 x_{i-1} + 8 v_{i-1}^2 - 5) d^{16} \tau^9 + \\
& + 8192 (128 x_{i-1}^4 - 256 x_{i-1}^3 + 288 x_{i-1}^2 + 128 v_{i-1}^2 x_{i-1} - 160 x_{i-1} - 64 v_{i-1}^2 + 35) d^{16} \tau^8 - \\
& - 512 (38 x_{i-1} + 40 v_{i-1}^2 - 19) d^{14} \tau^{10} + \\
& + 32768 v_{i-1} (16 x_{i-1}^3 - 24 x_{i-1}^2 + 14 x_{i-1} - 4 v_{i-1}^2 - 3) d^{14} \tau^9 - \\
& - 16384 (32 x_{i-1}^4 - 64 x_{i-1}^3 + 92 x_{i-1}^2 - 60 x_{i-1} + 15) d^{14} \tau^8 + \\
& + 131072 v_{i-1} (16 x_{i-1}^2 - 16 x_{i-1} + 5) d^{14} \tau^7 - \\
& - 32768 (32 x_{i-1}^3 - 48 x_{i-1}^2 + 30 x_{i-1} + 4 v_{i-1}^2 - 7) d^{14} \tau^6 - 10240 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^{12} \tau^9 + \\
& + 256 (256 x_{i-1}^4 - 512 x_{i-1}^3 + 752 x_{i-1}^2 - 448 v_{i-1}^2 x_{i-1} - 496 x_{i-1} + 224 v_{i-1}^2 + 173) d^{12} \tau^8 - \\
& - 16384 v_{i-1} (8 x_{i-1}^2 - 8 x_{i-1} - 3) d^{12} \tau^7 + 327680 (2 x_{i-1} - 1) (2 x_{i-1}^2 - 2 x_{i-1} + 1) d^{12} \tau^6 - \\
& - 327680 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^{12} \tau^5 + 16384 (24 x_{i-1}^2 - 24 x_{i-1} + 7) d^{12} \tau^4 - \\
& - 64 (80 x_{i-1}^2 - 80 x_{i-1} + 49) d^{10} \tau^8 - 2048 v_{i-1} (8 x_{i-1}^2 - 8 x_{i-1} + 9) d^{10} \tau^7 - \\
& - 1024 (144 x_{i-1}^3 - 216 x_{i-1}^2 + 198 x_{i-1} - 4 v_{i-1}^2 - 63) d^{10} \tau^6 - \\
& - 163840 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^{10} \tau^5 - 81920 (10 x_{i-1}^2 - 10 x_{i-1} + 3) d^{10} \tau^4 + \\
& + 65536 v_{i-1} d^{10} \tau^3 - 32768 (2 x_{i-1} - 1) d^{10} \tau^2 + 48 d^8 \tau^8 + 256 v_{i-1} d^8 \tau^7 + \\
& + 256 (16 x_{i-1}^3 - 24 x_{i-1}^2 + 42 x_{i-1} - 12 v_{i-1}^2 - 17) d^8 \tau^6 + \\
& + 30720 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^8 \tau^5 + 256 (400 x_{i-1}^2 - 400 x_{i-1} + 143) d^8 \tau^4 + \\
& + 73728 v_{i-1} d^8 \tau^3 + 98304 (2 x_{i-1} - 1) d^8 \tau^2 + 4096 d^8 - 64 (4 x_{i-1} - v_{i-1}^2 - 2) d^6 \tau^6 - \\
& - 2048 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^6 \tau^5 + 1152 d^6 \tau^4 - 2048 v_{i-1} d^6 \tau^3 - \\
& - 3584 (2 x_{i-1} - 1) d^6 \tau^2 - 16384 d^6 + 32 v_{i-1} (2 x_{i-1} - 1) d^4 \tau^5 - \\
& - 16 (32 x_{i-1}^2 - 32 x_{i-1} + 39) d^4 \tau^4 - 2816 v_{i-1} d^4 \tau^3 - 2816 (2 x_{i-1} - 1) d^4 \tau^2 - \\
& - 2304 d^4 + 4 (4 x_{i-1}^2 - 4 x_{i-1} + 11) d^2 \tau^4 + 288 v_{i-1} d^2 \tau^3 + 288 (2 x_{i-1} - 1) d^2 \tau^2 + \\
& + 448 d^2 - \tau^4 - 8 v_{i-1} \tau^3 - 8 (2 x_{i-1} - 1) \tau^2 - 16.
\end{aligned}$$

При $\tau = 0$:

$$r_2 = 16(256d^8 - 1024d^6 - 144d^4 + 28d^2 - 1),$$

$$A_2 = 512d^8 - 512d^6 - 176d^4 + 28d^2 - 1,$$

$$\beta_1 = 2^{-16}(2^{12}d^8 + 2^{13}d^7 + 2^{10}d^5 + 2^7 \cdot 5d^4 - 2^7 \cdot 3d^3 - 2^7d^2 + 2^4d + 5),$$

$$\alpha_1^2 + 12\beta_1 = 2^{-10}(2^{10}d^8 + 2^{11}d^7 + 2^8d^6 + 2^7d^5 + 2^4 \cdot 3d^4 - 2^4 \cdot 5d^3 - 2^2 \cdot 5d^2 + 2^2d + 1).$$

Литература

- [1] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration. Second Edition. Springer. 2006.
- [2] Г. Г. Еленин. О числе корней многочлена четвертой степени. Препринт Института прикладной математики АН СССР N 34, М.: 1980 г. 28 с.
- [3] В. И. Арнольд. Теория катастроф. М.: Наука, 1995, 128 с.